

Praktikum „Effiziente Algorithmen“

Fallende Würfel

Miao Wang, Florian Thiel, Robert Richter, Manuel Schulze

Institut für Informatik, Freie Universität Berlin

Zusammenfassung Im Praktikum „Effiziente Algorithmen“ werden Probleme aus der theoretischen Informatik behandelt. Dieses Paper beschreibt die Entwicklung einer Simulation für das Problem der fallenden Würfel.

1 Einleitung

Gegeben ist, wie in Abbildung 1 dargestellt, ein System von Würfeln. Das System kann stabil, d.h. die Würfel bleiben einfach liegen oder, man ahnt es schon, instabil sein. In diesem Fall beginnen einzelne Würfel zu fallen und sorgen dafür, dass andere Würfel ebenfalls fallen.

Ziel ist es eine Simulation zu erstellen, die den Fall der Würfel realistisch wiedergibt. Um das Problem zu vereinfachen werden die Würfel im 2-dimensionalen Raum betrachtet.

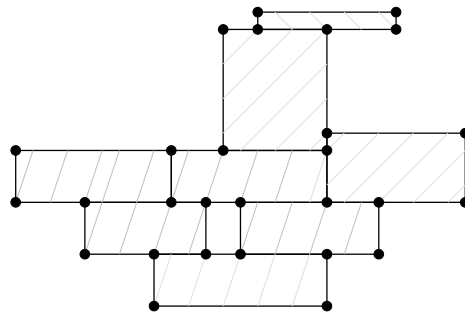


Abbildung 1: Ein Stapel Würfel in der Ausgangsposition

2 Das Modell

Um die physikalischen Vorgänge beschreiben zu können, muss ein geeignetes Modell definiert werden. Dieses Modell wird im folgenden vorgestellt.

Gegeben sind die Ortsvektoren $p_i(t)$ der Würfel ($i = 1, \dots, n$) zum Zeitpunkt t . Jeder Würfel wird durch vier Ortsvektoren bestimmt, die die Lage des Würfels festlegen. Die Angaben für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung lassen sich wie folgt berechnen:

- Die Geschwindigkeit $v_i(t) = \dot{p}_i(t)$.
- Die Beschleunigung $a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \ddot{p}_i(t)$.

Am Anfang ist $t = 0$ und die Geschwindigkeit ist $v_i(0) = 0$. Im Verlauf der Simulation werden die Zeitschritte erhöht. Gesucht sind die $p_i(t)$.

2.1 Restriktionen

Die Würfel und die Simulation unterliegen einigen Restriktionen.

1. Längenrestriktion: Durch die Berechnungen entstehen Längenverzerrungen, die dazu führen, dass die Würfelform aufgelöst wird. Aus diesem Grund werden zwischen den Punkten eines Würfels „Stangen“, wie in Abbildung 2 dargestellt, eingefügt. Für die Punkte $p_i(t)$ und $p_j(t)$ gilt die folgende Bedingung $\|p_i(t) - p_j(t)\| = \text{const}$.

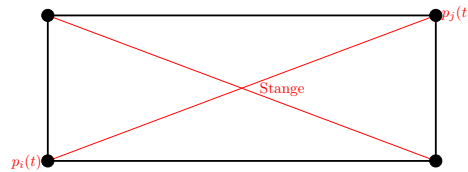


Abbildung 2: Sicherstellung der Längenrestriktion in einem Würfel

2. Seitenrestriktion: Damit sich die Würfel beim Fallen nicht durchdringen, muss die Seitenrestriktion sichergestellt werden. Die Punkte $p_i(t)$, $p_j(t)$ und $p_k(t)$ aus Abbildung 3 bilden ein Dreieck, dessen Fläche ≥ 0 sein muss ($A(p_i(t), p_j(t), p_k(t)) \geq 0$).

Die Seitenrestriktion kann wie in Abbildung 4 verstanden werden. Beim Berechnen des Flächeninhalts erhält man einen Wert, der größer (A_1), kleiner (A_2) oder gleich null ($p_k(t)$ liegt auf der Geraden $(p_i(t), p_j(t))$) sein kann.

Die Seitenrestriktion muss aber nur dann beachtet werden wenn der Punkt $p_k(t)$ zwischen den Punkten $p_i(t)$ und $p_j(t)$ liegt. Mit anderen Worten: Fliegen zwei Steine aneinander vorbei, muss die Seitenrestriktion nicht beachtet werden.

2.2 Der Algorithmus

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Algorithmus berechnet die Ortsvektoren für jeden Zeitschritt.

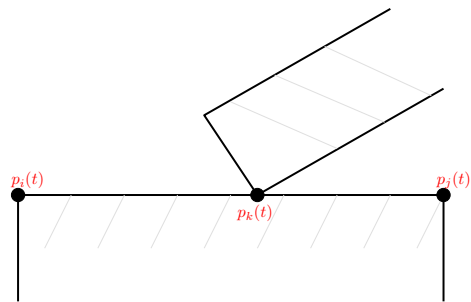


Abbildung 3: Die Seitenrestriktion bei zwei Würfeln

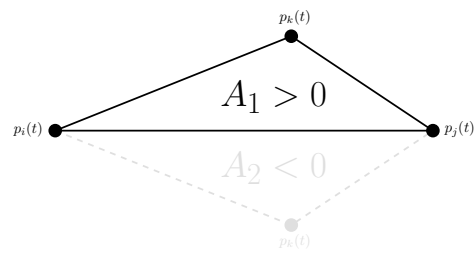


Abbildung 4: Geometrische Interpretation der Seitenrestriktion

```

for kleine Zeitschritte  $\Delta t$  do
  Bestimme die aktiven Restriktionen
  Bestimme  $(a_i)$ 
   $v_{i+1} := v_i + a_i \cdot \Delta t$ 
   $p_{i+1} := p_i + v_i \cdot \Delta t$ 
  Eventuell Längenkorrektur
end

```

1 : Algorithmus zum Bestimmen der Ortsvektoren

Bestimmen der aktiven Restriktionen Die zu beachtenden Restriktionen und ihre Bedeutung für die Simulation wurden bereits beschrieben. In diesem Abschnitt wird die Berechnung etwas genauer betrachtet.

1. Längenrestriktion:

$$\begin{aligned}
 & \langle p_i - p_j, p_i - p_j \rangle = l_{i,j}^2 \\
 \text{1. Ableitung } \frac{d}{dt}: & 2\langle v_i - v_j, p_i - p_j \rangle = 0 \\
 & \langle v_i, p_i - p_j \rangle = \langle v_j, p_i - p_j \rangle \\
 \text{2. Ableitung } \frac{d^2}{dt^2}: & \langle a_i - a_j, p_i - p_j \rangle + \|v_i - v_j\|^2 = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

2. Seitenrestriktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{pmatrix} \geq 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \dot{x}_i & x_j & x_k \\ \dot{y}_i & y_j & y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_i & \dot{x}_j & x_k \\ y_i & \dot{y}_j & y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_i & x_j & \dot{x}_k \\ y_i & y_j & \dot{y}_k \end{pmatrix} \geq 0 \\
 & \text{falls Gleichung (2) = 0}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \ddot{x}_i & x_j & x_k \\ \ddot{y}_i & y_j & y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_i & \ddot{x}_j & x_k \\ y_i & \ddot{y}_j & y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_i & x_j & \ddot{x}_k \\ y_i & y_j & \ddot{y}_k \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dot{x}_i & \dot{x}_j & x_k \\ \dot{y}_i & \dot{y}_j & y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dot{x}_i & x_j & \dot{x}_k \\ \dot{y}_i & y_j & \dot{y}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_i & \dot{x}_j & \dot{x}_k \\ y_i & \dot{y}_j & \dot{y}_k \end{pmatrix} \geq 0 \\
 & \text{falls Gleichung (2) = 0} \\
 & \text{und Gleichung (3) = 0}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Gleichung (2) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks (p_i, p_j, p_k) . Ist dieser null, d.h. zwei Würfel sind kollidiert, dann tritt Gleichung (3) in Kraft. Diese beschreibt die relativen Geschwindigkeiten der zwei kollidierten Würfel

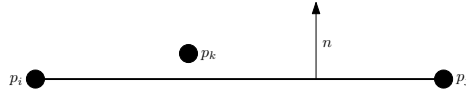


Abbildung 5: Äquivalente Fassung der Gleichung (3)

und kann auch wie folgt aufgefasst werden. Der Punkt p_k lässt sich auch bestimmen mit

$$p_k = \alpha p_j + (1 - \alpha) p_i \quad (5)$$

wobei $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt. Und n ist der nach links gedrehte Vektor $(p_j - p_i)^\perp$. Die Gleichung (3) ist äquivalent zu

$$\langle v_k, n \rangle \geq \alpha \langle v_j, n \rangle \quad (6)$$

Die Aussage dieser Gleichung ist: Wenn zwei Würfel $w_{i,j}$ und w_k kollidieren, dann muss die resultierende Geschwindigkeit des Würfels w_k mindestens so groß sein wie die des Würfels $w_{i,j}$ und zwar für alle Punkte p_k , die zwischen p_i und p_j liegen. Abbildung 6 zeigt diesen Sachverhalt grafisch.

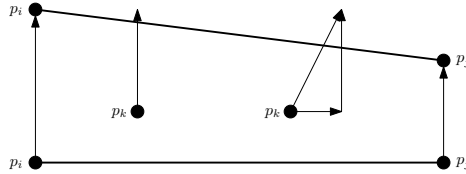


Abbildung 6: Relative Bewegung von zwei Würfeln

Daraus lässt sich auch eine äquivalente Fassung für Gleichung (4) angeben.

$$\langle a_k, n \rangle - \alpha \langle a_j, n \rangle - (1 - \alpha) \langle a_i, n \rangle + |v_i, v_j| + |v_j, v_k| + |v_k, v_i| \geq 0 \quad (7)$$

wobei man für $|v_i, v_j|$ auch schreiben kann

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_i & \dot{x}_j \\ \dot{y}_i & \dot{y}_j \end{vmatrix} = (\dot{x}_i - \dot{y}_j)(\dot{x}_j - \dot{y}_i) \quad (8)$$

Die Gleichung (4) ist wirksam wenn die Gleichungen (2) und (3) null sind.

Die Zielfunktion Zu jedem Punkt p_i ist die Masse m_i bekannt. Damit die Simulation funktioniert muss ein externes Kraftfeld F_i vorhanden sein. In unserem Fall ist $F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$. Die Zielfunktion ist nun wie folgt definiert:

$$\sum_{i=1}^n m_i \|a_i - F_i\|^2 \rightarrow \min \quad (9)$$

unter

- Längenrestriktionen für alle Stangen (p_i, p_j) und
- Seitenrestriktionen für alle aktiven Tripel (p_i, p_j, p_k) .

2.3 Bemerkungen

Die Lösung der Gleichung (9) liefert zu jeder Nebenbedingung eine „duale Variable“, die als **Kraft** interpretiert werden kann. Diese Kraft kann man evtl. in der Visualisierung darstellen. Ein Problem, das dabei auftritt ist, dass die Kräfte aufgrund der Elastizität im allgemeinen nicht eindeutig sind.

Das nächste Problem betrifft die Verteilung der Masse eines Würfels auf die Punkte. In der Realität ist die Masse gleichmäßig im Würfel verteilt. Um diesen Aspekt einigermaßen genau nachzubilden wird jeder Würfel, wie in Abbildung 7 gezeigt, aufgeteilt und die Masse entsprechend auf die zusätzlichen Punkte verteilt.

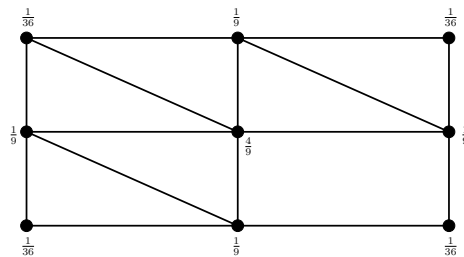


Abbildung 7: Verteilung der Masse eines Würfels