

# Praktikum „Effiziente Algorithmen“

## Fallende Würfel

Miao Wang, Florian Thiel, Robert Richter, Manuel Schulze

Institut für Informatik, Freie Universität Berlin

**Zusammenfassung** Im Praktikum „Effiziente Algorithmen“ werden Probleme aus der theoretischen Informatik behandelt. Unsere Aufgabe ist es eine Simulation zu erstellen, die den Fall von Würfeln im 2-dimensionalen Raum realistisch darstellt. Dieses Paper beschreibt die ermittelten Formeln zur quadratischen linearen Optimierung als Eingabe in CGAL.

### 1 Die Zielfunktion

CGAL bietet ein Package zur Berechnung von konvexen quadratischen Optimierungen, welches im Folgenden als Solver bezeichnet wird. Der Solver erwartet eine Eingabe einer zu minimierenden Zielfunktion in folgender Form:

$$x^T D x + c^T x + c_0 \tag{1}$$

$x$  als Vektor der gesuchten  $n$  Variablen  $(x_0, \dots, x_n - 1)$

$D$  als  $n \times n$  Matrix der Koeffizienten der quadratischen Variablen

$c$  als  $n$ -dimensionaler Vektor der Koeffizienten der linearen Variablen

$c_0$  als Konstante

Zum Beispiel für die Funktion  $x^2 + 4y^2 - 32y + 64$  wäre die Formel:

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \ -32) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 64$$

**Achtung:** In CGAL muss 2D (also  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ) anstatt D in die Berechnung eingegeben werden!

Meiner Meinung nach ist das so, weil CGAL versucht die allgemeine Form  $\frac{1}{2}x^T D x + c^T x + c_0$  zu lösen.

Für unsere Zielfunktion

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i \|a_i - F_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left\| \begin{pmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n m_i \left\| \begin{pmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} + g \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n m_i (a_{xi}^2 + (a_{yi} + g)^2) \\
&= \sum_{i=1}^n m_i a_{xi}^2 + m_i a_{yi}^2 + 2m_i g a_{yi} + m_i g^2 \tag{3}
\end{aligned}$$

lautet dementsprechend die Formel:

$$(a_{x1} \ a_{y1} \ \dots \ a_{xn} \ a_{yn}) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ \vdots \\ a_{xn} \\ a_{yn} \end{pmatrix} + (0 + 2m_1g \ \dots \ 0 + 2m_n g) \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ \vdots \\ a_{xn} \\ a_{yn} \end{pmatrix} + m_1 g^2 + \dots + m_n g^2 \tag{4}$$

## 2 Die Randbedingungen

Bei den Randbedingungen muss man beachten, dass sie nicht im direkten Verhältnis zur gesuchten Variabel  $a_{xi}$  oder  $a_{yi}$  stehen, sondern Längenrestriktion und Seitenrestriktion von  $p_{xi}$  und  $p_{yi}$  abhängig sind.

**Annahme:** Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass  $p'$  der Zustand zum Zeitpunkt  $t$  darstellt und  $p$  den Zustand zum Zeitpunkt  $t+1$ . Meine Annahme ist, dass folgendes äquivalent ist  $p = p' + v' + \ddot{a} = p' + v' \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$  Die Frage ist also ob das alte  $a'$  oder neue  $a$  in die Berechnung eingehen. Da nur  $a$  Sinn macht in Bezug auf die Zielfunktion habe ich sie gewählt.

### 2.1 Die Längenrestriktion

Demzufolge die Längenrestriktion für einen Vektor zwischen  $p_i$  und  $p_j$ :

$$\langle p_i - p_j, p_i - p_j \rangle = l_{i,j}^2 \tag{5}$$

davon die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\langle a_i - a_j, p_i - p_j \rangle + \|v_i - v_j\|^2 = 0 \\
&\left\langle \begin{pmatrix} a_{xi} - a_{xj} \\ a_{yi} - a_{yj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{xi} - p_{xj} \\ p_{yi} - p_{yj} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\| \begin{pmatrix} v_{xi} - v_{xj} \\ v_{yi} - v_{yj} \end{pmatrix} \right\|^2 = 0 \\
&= a_{xi}(p'_{xi} - p'_{xj}) - a_{xj}(p'_{xi} - p'_{xj}) + a_{yi}(p'_{yi} - p'_{yj}) - a_{yj}(p'_{yi} - p'_{yj}) + (v'_{xi} - v'_{xj})^2 + (v'_{yi} - v'_{yj})^2 \tag{6}
\end{aligned}$$

was auch Sinn macht, da vier Variablen stets an einer Stange beteiligt sind. Diese Bedingung gilt 5-mal: je einmal für jede Quaderseite und einmal für eine Diagonale.

## 2.2 Die Seitenrestriktion

Die Anwendung der Seitenrestriktion ist bedingt. Sie tritt dann in Kraft, wenn ein Würfel mit einem anderen kollidiert. Modelliert wird dieses Ereignis durch drei Punkte  $p_i$ ,  $p_j$  und  $p_k$ , wobei  $p_i$ ,  $p_j$  dem Würfel  $W_{ij}$  und  $p_k$  dem Würfel  $W_k$  zugeordnet sind, welche ein Dreieck  $D \in \{p_i, p_j, p_k\}$  in der Ebene mit dem Flächeninhalt  $A_D$  aufspannen. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks inklusive seiner Änderung über die Zeit  $\dot{A}_D$  zeigt an, ob eine Seitenrestriktion für die drei Punkte notwendig ist:

Wenn  $A_D \leq 0$  ist und  $\dot{A}_D \leq 0$ , dann findet die Seitenrestriktion Anwendung. Anschaulich bedeutet dies, wenn  $p_k$  genau auf oder schon hinter der Kante zwischen  $p_i$  und  $p_j$  liegt<sup>1</sup> und das auch mit fortschreitender Zeit so bleibt (relative Geschwindigkeitsdifferenz gleich 0) oder sich verstärkt ( $p_k$  dringt noch weiter in  $W_{ij}$  ein), dann muss dafür gesorgt werden, dass  $p_k$  nicht oder nicht weiter in  $W_{ij}$  eindringt, indem die 2. Ableitung der Seitenrestriktion, die die Änderung der Änderung der Punktpositionen bei der Optimierung der Zielfunktion entsprechend beeinflusst, angewendet wird.

Laut [Rote] ist (auf unsere Syntax angepasst)

$$A_D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{xi} & p_{xj} & p_{xk} \\ p_{yi} & p_{yj} & p_{yk} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Für  $\dot{A}_D \geq 0$  liefert [Rote] eine alternative Form:

$$\dot{A}_D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{xi} & p_{xj} & p_{xk} \\ p_{yi} & p_{yj} & p_{yk} \end{vmatrix}' \geq 0 \iff \langle v_k, n \rangle \geq \alpha \langle v_j, n \rangle \quad (8)$$

Aus dieser Äquivalenz lässt sich schließen

$$\dot{A}_D \leq 0 \iff \langle v_k, n \rangle \leq \alpha \langle v_j, n \rangle \quad (9)$$

Es lässt sich zeigen, dass wenn  $p_i, p_j$  und  $p_k$  auf einer Geraden liegen (also  $A_D = 0$ ) für den skalaren Wert  $\alpha$  mit  $0 \leq \alpha \leq 1$  gilt

$$\alpha = \frac{p_{xk} - p_{xi}}{p_{xj} - p_{xi}} = \frac{p_{yk} - p_{yi}}{p_{yj} - p_{yi}} \quad (10)$$

Der Vektor  $n$  ist laut [Rote] gegeben als  $(p_j - p_i)^\perp$ . Da  $(p_j - p_i)$  ein Ortsvektor ist, kann er mittels einer Drehmatrix um den Ursprung gedreht werden. Dabei ergibt sich der Drehwinkel zu  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Mit der Drehmatrix

<sup>1</sup> Bei kontinuierlicher Zeit, also unendlich kleinen Berechnungsintervallen würde dieser Fall gar nicht auftreten. Da wir das Modell jedoch mit rational quantisierter Zeit berechnen, kann es passieren, dass Würfel von einem Zustand zum nächsten ineinander fallen. Je kleiner die Zeitintervalle, desto kleiner wird dieser Fehlereffekt.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

ergibt sich  $n$  zu

$$n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{xj} - p_{xi} \\ p_{yj} - p_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{yj} + p_{yi} \\ p_{xj} - p_{xi} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Auch für die 2. Ableitung der Seitenrestriktion liefert [Rote] eine alternative Form:

$$\langle a_k, n \rangle - \alpha \langle a_j, n \rangle - (1 - \alpha) \langle a_i, n \rangle + |v_i, v_j| + |v_j, v_k| + |v_k, v_i| \geq 0 \quad (13)$$

wobei man für  $|v_i, v_j|$  auch schreiben kann

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_i & \dot{x}_j \\ \dot{y}_i & \dot{y}_j \end{vmatrix} = (\dot{x}_i \dot{y}_j) - (\dot{x}_j \dot{y}_i) = (v_{xi} v_{yj}) - (v_{xj} v_{yi}) \quad (14)$$

Die Koeffizientendarstellung von (7) ergibt sich respektive (10), (12) und (14) entsprechend zu

$$\begin{aligned} a_{xk} n_x &+ \\ a_{yk} n_y &+ \\ a_{xj} (-\alpha n_x) &+ \\ a_{yj} (-\alpha n_y) &+ \\ a_{xi} (\alpha - 1) n_x &+ \\ a_{yi} (\alpha - 1) n_y &+ \\ v_{xi} v_{yj} - v_{xj} v_{yi} &+ \\ v_{xj} v_{yk} - v_{xk} v_{yj} &+ \\ v_{xk} v_{yi} - v_{xi} v_{yk} &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Ist also nun die Bedingung für die Seitenrestriktion der drei Punkte  $p_i, p_j$  und  $p_k$  gegeben, so muss diese Nebenbedingung bei der Optimierung der Zielfunktion gelten.

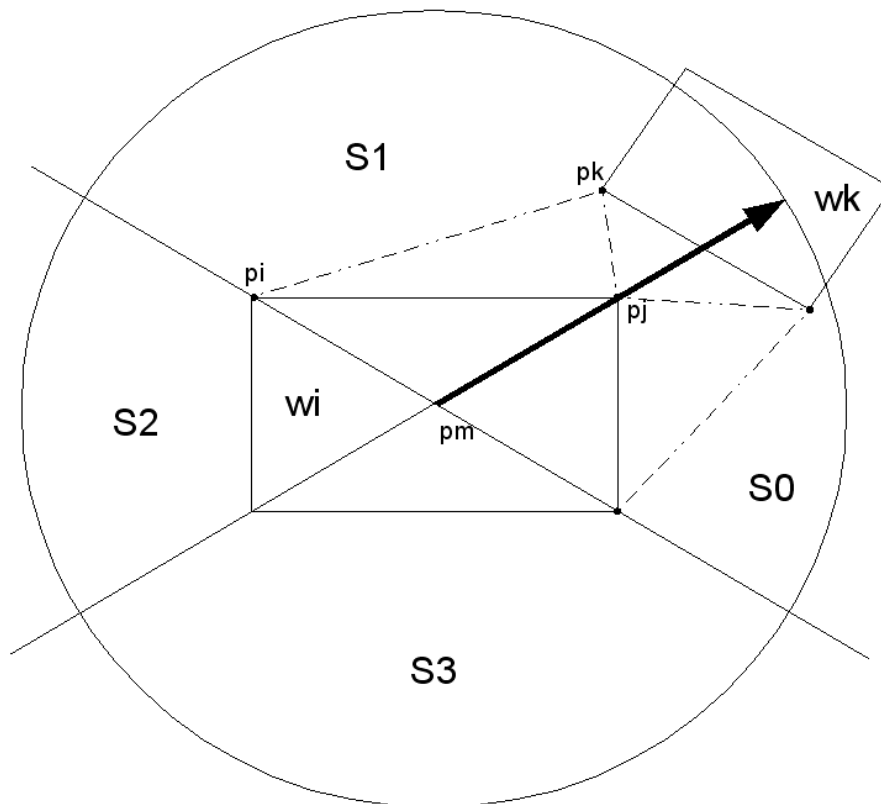
### 2.3 Reduzierung des Untersuchungsraum der Seitenrestriktion

Die Seitenrestriktion liefert die Möglichkeit, eine Seiten-Punkt-Konstellation zu restriktieren. Der Anwendungsbedarf wird über die Dreiecksfläche ermittelt. Ein Würfel hat jedoch vier Seiten. Es stellt sich die Frage, wie man bestimmt mit welcher der vier Seiten ein beliebiger Punkt kollidiert. Denn, da ein Punkt nur mit einer Seite eines Würfels gleichzeitig kollidieren kann, macht es wenig Sinn, ihn auch mit den restlichen Seiten zu restriktieren.

Aus diesem Grund werden dem Würfel  $w_i$ , für den bestimmt werden soll, ob es Punkte anderer Würfel  $w_k$  gibt, die mit ihm kollidieren vier Sektoren

$S_0, S_1, S_2, S_3$  zugeordnet. Jeder dieser Sektoren besitzt eine eindeutige Seite des Würfels  $w_i$ . Befindet sich ein Punkt  $p_k$  des Würfels  $w_k$  in einem Sektor, so kann er eindeutig einer Seite des Würfels  $w_i$  zugeordnet werden. Die Sektorzuordnung erfolgt über Vollkreiswinkelbestimmung. Dabei dient der Würfelmittelpunkt  $p_m$  des Würfels  $w_i$  als Koordinatenursprung. Um den Sektorbereich einzugrenzen, wird die Sektorbestimmung nur für Punkte  $p_k$  durchgeführt, die einen bestimmten Abstand zu  $p_m$  nicht überschreiten.

Konkret müssen also erstmalig alle Würfel mit allen Punkten der anderen Würfel untersucht werden. Dieser Untersuchungsraum wird pro untersuchten Würfel über den Mittelpunktsabstand eingeschränkt. Da die Mittelpunktsabstandsrechnung relativ kostengünstig ist, sollte die Anzahl der Komplexität  $O(n^2)$  von Untersuchungen der Komplexität  $O(1)$  akzeptabel sein.



## 2.4 Tisch und Tischrestriktion

Der Tisch wird zunächst behandelt, wie ein normaler Würfel. Allerdings gilt für ihn noch die Tischrestriktion. Die Tischrestriktion restriktiert die Beschleunigung der Tischpunkte zu null. Sollte der Tisch zu Beginn der Simulation still im Raum stehen (was der Regelfall sein sollte), so wird er es dadurch auch am Ende noch tun. Wenn sich seine Punkte nie bewegen, braucht man auch keine Längenrestriktion auf sie anwenden. In die Seitenrestriktionsuntersuchung und Anwendung ist der Tisch allerdings inkludiert, damit Würfel nicht in ihn hinein beschleunigt werden können. Die Masse des Tisches wird auf den maximal möglichen Wertes des genutzten Zahlenformats gesetzt.

## 3 Referenzen

[http://upcoming.cgal.org/Manual/3.3/doc\\_html/cgal\\_manual/QP\\_solver/Chapter\\_main.html](http://upcoming.cgal.org/Manual/3.3/doc_html/cgal_manual/QP_solver/Chapter_main.html)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic\\_programming](http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_programming)