

Algorithmen und Programmierung I

WS 2004 / 2005

Übung 2 (35 Punkte)

Ausgabe: Mo. 1.11.2004

Abgabe: Mi. 10.11.2004, 10.00

Verspätet abgegebene Lösungen werden nicht akzeptiert.

Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen. Die Gruppe darf nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Tutors gewechselt werden.

Abgegeben werden müssen

- Alle Lösungen einmal ausgedruckt. **Handschriftliche Lösungen werden nicht akzeptiert.**
- Programme, Testdaten, Testergebnisse in elektronischer Form in Absprache mit den Tutorinnen und Tutoren.

Aufgabe 2.1 (5 P)

Geben Sie an, welche der folgenden Relationen Funktionen sind, ferner ihre Eigenschaften (partiell / total, surjektiv / injektiv / keines von beiden).

- kontostand: bankkonto \times betrag ; Bsp: kontostand = {(4711, 11.50€), (2387, -13,30€), ...}
- hört : Studierende \times Vorlesungen
- besitzt_Fahrzeug : natürliche_Personen \times Kfz-Briefe
- teilt : $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (\mathbf{Z} sind die ganzen Zahlen)
- sin : $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (\mathbf{R} sind die reellen Zahlen).

Geben Sie jeweils eine *knappe Begründung* an.

Aufgabe 2.2 (5 P)

a) Beweisen Sie:

Wenn $f : A \rightarrow W$, $g : W \rightarrow V$ Funktionen sind, dann ist $g \circ f : A \rightarrow V$ eine Funktion.

b) f sei total, surjektiv, g total, bijektiv. $g \circ f$ ist dann

Beispiel ? (abstraktes Beispiel der Art: $f = \{(a1, w1), (a2, w2)\dots\}$, $g = \{\dots\}$, $f \circ g = \dots$ reicht)

c) f total, injektiv aber nicht surjektiv, g bijektiv, partiell. $g \circ f$ ist dann

Gefragt ist hier was sicher gilt, nicht was abhängig von speziellen f, g gelten könnte. Beispiel?

Aufgabe 2.3 (5 P)

a) Der Ausdruck $f x \cdot g y$ bedeutet:

- a. $f(x \cdot (g y))$ b. $f(x \cdot g) y$ c. $(f x \cdot g) y$ d. $(f x) \cdot (g y)$

b) Welchen Unterschied gibt es zwischen Funktionen und Operatoren?

- c) Ist $\text{sqrt} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion? (\mathbb{R} bezeichnet die reellen Zahlen)
 d) Was ist ein Prädikat?
 e) Welche Funktionen besitzen keine Inverse?

f) Argumentbereich für die Funktion `hochVier`, die die vierte Potenz einer Zahl berechnet, seien die ganzen Zahlen, Wertebereich die natürlichen Zahlen. Ist die Funktion

- a. total b. surjektiv c. injektiv d. bijektiv e. partiell? (Mehr als eine Eigenschaft möglich)

Aufgabe 2.4 (5 P)

Der Euklidische Algorithmus bestimmt den größten gemeinsamen Teiler von zwei natürlichen Zahlen x und y : `ggT x y`.

Voraussetzung ist $x > y$, $x \neq 0$ (`/= "ungleich"` in Haskell).

Algorithmus `ggT x y`:

wenn $y = 0$ dann ist x der ggT von x und y

sonst ist es der ggT von y und $(x \bmod y)$, dem Rest bei ganzzahliger Division von x durch y

- a) Beweisen Sie, dass der berechnete Wert tatsächlich der ggT von x und y ist. Zeigen Sie dazu, dass jeder Teiler von x und y auch Teiler von $(x \bmod y)$ ist und umgekehrt.
 b) Implementieren Sie den Algorithmus in Haskell

Aufgabe 2.5 (5 P).

a) Definieren Sie eine Funktion `max3`, die das Maximum von drei Zahlen liefert und sich auf eine Funktion `max` zur Bestimmung des Maximums zweier Zahlen abstützt.

b) Definieren Sie eine Funktion `alleGleich`, die drei ganzen Zahlen als Argumente besitzt und `True` liefert, wenn alle Werte gleich sind, `False` sonst. Der Vergleichsoperator für zwei Werte liefert als Wert einen der Booleschen (oder aussagenlogischen) Werte `True` oder `False`. Verwenden Sie den Operator `&&`, der zwei Boole'sche Werte aussagenlogisch konjunktiv („und“) verknüpft.

Aufgabe 2.6 (5 P)

Welche Funktionen (Abschnitte) sind korrekt / falsch definiert? Begründen bzw. erläutern Sie, was die Funktionen berechnen.

- a) `(==0) . (`mod` 2)`
 b) `(`mod` 2 == 0)`
 c) `flop f b a = f a b`
 d) `(* gcd 8 12)`
 f) `f x y = (* gcd x y)`
 g) `g a b c = f a b c + f a (b-1) c`
 -- f aus der vorigen Teilaufgabe

Aufgabe 2.7 (5 P)

Das Newton-Iterationsverfahren bestimmt die Nullstelle einer (gutartigen) Funktion folgendermaßen:

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n) / f'(x_n))$$

f' bezeichnet hier die Ableitung von f .

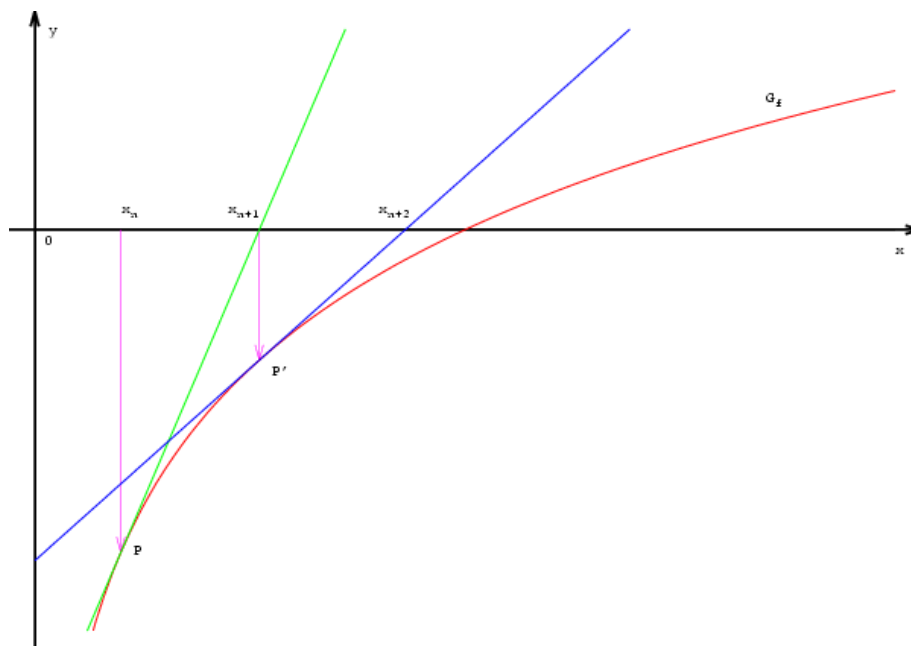
Bestimmen Sie eine auf 3 Stellen genaue Approximation der Quadratwurzel von n mit Hilfe dieses Verfahrens. Gesucht ist also eine Haskell-Funktion `sqrtNewton`, die das mit Hilfe der Newton-Iteration leistet. Hinweise:

- Finden Sie eine Funktion $f(n,x)$, die 0 ist wenn x die Quadratwurzel aus n ist.
- Bestimmen Sie für diese Funktion die Iteration gemäß obiger Formel.
- Stützen Sie `sqrtNewton` auf eine Funktion mit zwei Argumenten `ab`, bei der das zweite Argument jeweils der Anfangsschätzwert x_i ist, $i=0,1,2,\dots$

Es kann vorausgesetzt werden, dass die Funktion differenzierbar ist und Konvergenz für den Anfangswert gesichert ist (Das ist mit "gutartige Funktion" gemeint).¹

(Fortsetzung auf dem nächsten Übungszettel: Verfahren für beliebiges f implementieren)

Die folgende Grafik² veranschaulicht das Verfahren:



Bemerkung zu den Übungen:

Die eine oder andere Aufgabe mag schwer erscheinen. Sie ist es sicher, wenn man das Lösungsverfahren (wie Newton Iteration) nie gehört hat. Ihre Aufgabe ist es dann, sich die Voraussetzungen zur Lösung für diese (beispielhafte) Anwendung selbst zu beschaffen. Das ist übrigens die gleiche Situation, die Sie im Beruf immer wieder erleben. In den Klausuren wird es aber nur Aufgaben geben, die den Stoff der Veranstaltung und sonst nichts voraussetzen.

¹ Für das Wurzelziehen durch Nullstellenbestimmung nach Newton – auch Heron-Verfahren genannt – konvergiert das Verfahren sogar für jeden Anfangswert.

² aus mathe-board