Algorithmen und Programmierung

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1.1

Für die Auswertung von max(L) müssen wir entsprechend der gegebenen Rekursionsvorschrift L rekursiv aufspalten, bis der Rekursionsanker max (n_1) = n_1 erreicht wurde. Anschließend wird der Ausdruck von rechts nach links ausgewertet. Das Zeichen > steht hier für einen noch auszuführenden Vergleich.

$$
\begin{aligned}
\max(5) &= 5 \\
\max(8,3) &= 8 > \max(3) \\
&= 8 > 3 \\
&= 8 \\
\max(3,8) &= 3 > \max(8) \\
&= 3 > 8 \\
&= 8 \\
\max(7,5,8,3) &= 7 > \max(5,8,3) \\
&= 7 > 5 > \max(8,3) \\
&= 7 > 5 > 8 > \max(3) \\
&= 7 > 5 > 8 > 3 \\
&= 7 > 5 > 8 \\
&= 7 > 8 \\
&= 8 \\
\max(5,3,7,1,6,5) &= 5 > \max(3,7,1,6,5) \\
&= 5 > 3 > \max(7,1,6,5) \\
&= 5 > 3 > 7 > \max(1,6,5) \\
&= 5 > 3 > 7 > 1 > \max(6,5) \\
&= 5 > 3 > 7 > 1 > 6 > \max(5) \\
&= 5 > 3 > 7 > 1 > 6 \\
&= 5 > 3 > 7 > 6 \\
&= 5 > 3 > 7 \\
&= 5 > 7 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.2

a) Anzahl der Händeschüttler bei 5 Personen:

$$H(5) = 1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{i=1}^{4} i = \left(\frac{5 \cdot 4}{2} \right)$$

Die nachfolgende Tabelle visualisiert die Beziehung $a \in A$ schüttelt $b \in B$ die Hand.

		A				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	1					
	2	x				
B	*3*	x	x			
	4	x	x	x		
	5	x	x	x	x	

b) Anzahl der Händeschüttler bei 4 Personen:

$$H(4) = 1 + 2 + 3 = \sum_{i=1}^{3} i = \left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right)$$

Jede hinzukommende Person muss den bereits anwesenden n Personen die Hand schütteln. Es ergeben sich für die n-te Person bei n-1 anwesenden Personen genau n-1 Händeschüttler.

Daraus lässt sich die folgende Behauptung ableiten:

$$H(n) = 1 + ... + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

H(n) erinnert an die natürliche Reihe aus der Vorlesung.

c) Beweis von H(n) mittels **vollständiger Induktion**

Induktionsbehauptung:

$H(n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ sei wahr für n+1 aus den Natürlichen Zahlen

Induktionsvoraussetzung:

$H(n) = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ ist wahr für n aus den Natürlichen Zahlen

Induktionsanfang:

Wir müssen zeigen, dass die Anzahl der Händeschüttler bei einer Person $H(1) = \dfrac{0 \cdot 1}{2} = 0$ ist. Das ist offensichtlich so, da dieser keinen Partner zum Händeschütteln hat.

Induktionsschritt:

Zu zeigen ist, dass für n+1 Personen die Anzahl der Händeschüttler durch $H(n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ berechnet werden kann.

Da wir $H(n+1)$ nicht direkt zerlegen können, ist zuerst folgende Überlegung notwendig:

Überlegung: Die n+1-te hinzukommende Person muss allen anwesenden Personen die Hand schütteln. Das sind zusätzliche n Händeschüttler zu den bereits durchgefühten H(n) Händeschüttlern.

Das nutzen wir nun für die Zerlegung von $H(n+1)$:

$$\begin{aligned} H(n+1) &= H(n) + n && \text{nach Überlegung} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)}{2} + n && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)+2n}{2} \\ &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} && \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

Definition von S

(1) $0 \in S$

(2) $x \in S \mid 2x+1 \in S$ und $3x+1 \in S$

Um die aus (1) und (2) resultierende Menge zu erhalten, muss man (1) in die Formeln von (2) einsetzen. Dabei erhält man 1 bis 2 neue Zahlen, die man erneut in die beiden Formeln einsetzt.

Die resultierende Menge ist:
S= {1,3,4,7,9,10,13,**15**,19,21,**22**,27,28,31,39,40,**43**,45,55, ...}

Beweis: **15, 22** und **43** lassen sich berechnen durch:

$$15 = 2\cdot 7+1 = 2\cdot(2\cdot 3+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 1+1)+1)+1$$

$$22 = 3\cdot 7+1 = 3\cdot(2\cdot 3+1)+1) = 3\cdot(2\cdot(2\cdot 1+1)+1)+1$$

$$43 = 2\cdot 21+1 = 2\cdot(2\cdot 10+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(3\cdot 3+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(3\cdot(2\cdot 1+1)+1)+1)+1$$

Aufgabe 1.4

a) Eine mögliche Lösung ist das Einfügen eines weiteren Vergleichs in *sig n*:

```
sig n   | n > 0       =  1
        | n==0        =  0
        | otherwise   = -1
```

b) Um eine Division durch 0 beim Aufruf `signum 0` zu vermeiden wird die Definitionslücke auf -1/2 verschoben.

```
signum n= sig n * ( (-x) / abs x)
              where x = (2 * n)-1
```

Signum ist nur für die Natürlichen Zahlen definiert, da signum ½ wieder zu einer Division durch 0 führt.

Aufgabe 1.5

Folgende Wägungen sind nötig, wenn wir die *leichteste* Kugel suchen:

1. In der ersten Wägung werden jeweils 4 Kugeln auf die Waagschalen gelegt. Falls eine der beiden Hälften leichter ist, machen wir mit diesen 4 Kugeln weiter. Sollte keine Hälfte leichter sein, nehmen wir die 4 nicht gewogenen Kugeln.

2. In der zweiten Wägung legen wir je eine Kugel auf eine der Waagschalen. Sollte eine der beiden Kugeln leichter sein, haben wir unsere Kugel in der 2ten Wägung gefunden. Sollte keine der beiden Kugeln leichter sein, fahren wir mit den beiden nicht gewogenen Kugeln fort.

3. Wir legen wieder beide Kugeln auf die Waagschalen und wählen die leichtere.

In mindestens 2 und maximal 3 Wägungen haben wir das Minimum erhalten. Die Suche nach dem Maximum ist identisch zur Suche des Minimums, nur dass wir immer die Waagschale mit dem höheren Gewicht wählen.