Mathematik für Informatiker I
Probeklausur

1. Die Fibonacci Zahlen sind folgendermaßen rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

   Beweisen Sie, dass

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

   (man darf alle algebraischen Regeln verwenden).

2. Beweisen Sie, dass

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

   (man darf alle algebraischen Regeln verwenden).

3. Beweisen Sie, dass für $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ $a = b \Rightarrow ac = bc$. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen algebraischen Gesetze verwenden.

4. Beweisen sie, dass wenn $a \leq b$, $ac \leq bc$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$.

5. (a) Definieren Sie die Multiplikation von Zahlen in $\mathbb{Z}$.
   (b) Beweisen Sie, dass Ihre Definition keine Widersprüche enthält.

6. Beweisen Sie, das NOR eine logische Basis ist.

7. Finden Sie die KNF und DNF für die Formel

$$\neg\left((a \wedge b) \vee \neg c\right) \vee \left((b \wedge d) \vee e \vee \neg f\right)$$

8. Zeigen Sie mit Resolution, dass

$$F = b \vee (c \wedge d) \vee \neg(b \vee d) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge d)$$

   eine Tautologie ist.

(a) Zeigen Sie, durch algebraische Umformung, dass

$$(a \vee (b \vee c)) \wedge (c \vee \neg a) \equiv ((b \wedge \neg a) \vee c)$$

Sie dürfen die n der Vorlesung bewiesenen algebraischen Umformungen verwenden.

9. Beweisen Sie de Morgan's Regel

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(ohne in die Vorlesungs-Unterlagen zu schauen).

10. Beweisen Sie, dass die Komposition $f \cdot g$ von zwei bijektiven Funktionen bijektiv ist.

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ g &: B \to C \\ f \cdot g &: A \to C \end{aligned}$$