WS 04/05
Prof. Dr. Raúl Rojas

Mathematik für Informatiker I

7. Übungsblatt

1. Wir definieren die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

   $$\mathbb{R} = \{(A, B) \mid A \cup B = \mathbb{Q},\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ \forall a \in A\, \forall b \in B : a \leq b, \text{suprenum}(A) \notin A\}$$

   Anmerkung: Die Bedingung suprenum$(A) \notin A$ ist äquivalent zu es existiert kein $s \in A$ mit $s \leq a$ für alle $a \in A$.

   (a) Definieren Sie die Zahl $\sqrt{2}$ als reelle Zahl.

   (b) Definieren Sie die Addition von reellen Zahlen.

   (c) Definieren Sie die Multiplikation von reellen Zahlen.

   Überprüfen Sie jeweils die Konsistenz der Definitionen. 5 Punkte

2. Wir definieren eine komplexe Zahl als Paar (a, b) von reellen Zahlen.
   Die Addition von komplexen Zahlen ist definiert als $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
   Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist definert als $(a, b) \star (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$.

   (a) Beweisen Sie, dass die Multiplikation von komplexen Zahlen kommutativ und assoziativ ist.

   (b) Beweisen Sie das Distributivgesetz. 5 Punkte

3. Eine Gruppe ist eine Menge G, auf die eine Binäre Operation $\circ$ (d.h. eine Funktion $\circ : G \times G \to G$) definiert ist, falls

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$	Assoziativität
$\exists e \in G\, \forall a \in G :\ a \circ e = e \circ a = a$	Identitätselement
$\forall a \in G\, \exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = e$	Inverse

   (a) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q} - \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikationsoperation ist.

   (b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}$ eine Gruppe bezüglich der Addition ist.

   Für $\mathbb{Z}$ können Sie die übliche Notation mit positiven und negativen Zahlen verwenden.
   Für $\mathbb{Q}$ die Notation mit Brüchen. 5 Punkte

4. Eine Menge G mit zwei Operationen $\oplus$ und $\otimes$ ist ein Körper, wenn:

   (a) $(G, \oplus)$ eine Gruppe ist und $\oplus$ kommutativ ist (wir bezeichnen mit 0 das "Identitätselement" für $\oplus$).

   (b) $(G - \{0\}, \otimes)$ eine Gruppe ist, und $\otimes$ kommutativ ist.

   (c) Das Distributivgesetz gilt:

   $$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

   Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist. (Sie können Teile von Übung 3 verwenden.) 5 Punkte

5. Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die folgende Formel: 5 Punkte

$$F = \exists x\, \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge P(x,z) \wedge \neg P(z,x))$$

(a) $U_A = \mathbb{N}$, $P^A(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } m < n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

(b) $U_A = \mathbb{N}$, $P^A(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ falls } n = m+1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

(c) $U_A = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$),
$P^A(A,B) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } A, B \subseteq \mathbb{N},\ A \subseteq B \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

6. Man formuliere eine erfüllbare Aussage F, so dass für alle Modelle A von F gilt: $|U_A| \geq 4$. 5 Punkte