Grundlagen der theoretischen Informatik, SS 2005 — 3. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 9. Mai 2005, 10:15 Uhr

---

19. (10 Punkte) L_1 sei eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$, und
$$L_2 = \{\, w_1 0 w_2 0 \dots 0 w_n \mid w = w_1 w_2 \dots w_n \in L_1,\ n \geq 1,\ w_i \in \{0,1\} \,\}$$
sei die Sprache, wo zwischen je zwei Buchstaben eine Null eingefügt ist. (Am Ende wird *keine* Null angehängt!) Beweisen Sie, dass L_2 ebenfalls regulär ist.

20. (a) Das Produkt von Automaten.
Konstruieren Sie zu zwei gegebenen DEAs $M^1 = (Q^1, \Sigma, \delta^1, q_0^1, F^1)$ und $M^2 = (Q^2, \Sigma, \delta^2, q_0^2, F^2)$ einen DEA für die Sprache $L(M^1) \cap L(M^2)$.
(b) Konstruieren Sie einen DEA für die Sprache $L(M^1) \cup L(M^2)$.

21. (a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die durch 5 teilbaren Binärzahlen akzeptiert. Diesmal soll das niederwertigste Bit als erstes gelesen werden.
(b) Konstruieren Sie endliche Automaten für die durch 6 teilbaren Dezimalzahlen, die (1) von der höchsten zur niedrigsten Stelle (2) von der niedrigsten zur höchsten Stelle gelesen werden.

22. Ist die Nerode-Relation einer Sprache L immer eine Kongruenzrelation? Ist die Nerode-Relation einer regulären Sprache L immer eine Kongruenzrelation?

23. Welche der folgenden Sprachen über $\Sigma = \{0,1\}$ sind regulär?
(a) Die Sprache $L_1 = \{\, x \mid x = x^R \,\}$ der Palindrome
(b) $L_2 = \{\, 0^{i^2} \mid i \geq 1 \,\}$
(c) $L_3 = \{\, x \mid x$ enthält mindestens so viele Nullen wie Einsen $\}$
(d) $L_4 = \{\, x \mid$ die Anzahl der Nullen von x unterscheidet sich um höchstens um 1 von der Anzahl der Einsen $\}$
(e) $L_5 = \{\, x \mid$ in jedem Präfix von x unterscheidet sich die Anzahl der Nullen höchstens um 1 von der Anzahl der Einsen $\}$
(f) $L_6 = \{\, x \mid$ in jedem Präfix von x unterscheidet sich die Anzahl der Nullen höchstens um 2 von der Anzahl der Einsen $\}$

24. (Zusatzaufgabe, 0 Punkte) Für einen Homomorphismus $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ und eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ bezeichnet $h(L)$ die Sprache
$$h(L) := \{\, h(x) \mid x \in L \,\}.$$
Beweisen Sie, dass das Bild $h(L)$ einer regulären Sprache L unter einem Homomorphismus h regulär ist.

25. (*) Beweisen Sie: Wenn $L \in \Delta^*$ regulär ist und $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ ein Homomorphismus ist, ist auch die folgende Sprache regulär:
$$h^{-1}(L) := \{\, x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L \,\}$$

26. Welche der Sprachen $h_j(L_i)$ sind regulär, wenn L_i eine der Sprachen aus Aufgabe 23 ist und der Homomorphismus h_j folgendermaßen gegeben ist?
(a) $h_1(0) = a$, $h_1(1) = b$, $\Delta = \{a, b\}$.
(b) $h_2(0) = 1$, $h_2(1) = 1$.
(c) $h_3(0) = 01$, $h_3(1) = \varepsilon$.

27. Konstruieren Sie den Minimalautomaten für den Automaten aus Aufgabe 15.