

**Mathematik für Informatiker II**

Klaus Kriegel, Tobias Lenz

**Abgabe** 17.6.2005, spätestens 12:00 Uhr**Aufgabe 1** Konvergenz von Reihen (3+2 Punkte)

a) Es sei  $M = \{2^k \cdot 3^l \mid k, l \in \mathbb{N}\}$  die Menge der natürlichen Zahlen, die sich als ein Produkt aus Zweien und Dreien darstellen lassen und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  die Folge, welche die Elemente aus  $M$  aufsteigend geordnet aufzählt:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 9, a_8 = 12, \dots$$

Wir bezeichnen mit  $b_i = \frac{1}{a_i}$  die Folge der Inversen. Zeigen Sie, dass die zugehörige Reihe  $s_n = \sum_{i=1}^n b_i$  konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert  $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ .

**Hinweis:** Die Monotonie ist offensichtlich, eine obere Schranke kann man durch geschickte Gruppierung der Summanden nachweisen.

b) Es sei  $M'$  die Menge der positiven ganzen Zahlen, die durch 2 und durch 3 teilbar sind,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  die Folge, welche die Elemente aus  $M'$  aufsteigend geordnet aufzählt und  $d_i = \frac{1}{c_i}$  die Folge der Inversen. Zeigen Sie, dass die zugehörige Reihe  $t_n = \sum_{i=1}^n d_i$  nicht konvergiert.

**Aufgabe 2** Asymptoten (2+3+2 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Asymptoten

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$  definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b)  $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$  Bestimmen Sie den Definitionsbereich selbst!

c)  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{x+1}}$  definiert auf ganz  $\mathbb{R}$

**Aufgabe 3**  $\mathcal{O}$ -Notation (6 Punkte)

Welche der folgenden Implikationen sind wahr für alle Funktionen

$$f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+?$$

Begründen Sie positive Antworten an Hand der Definitionen und negative Antworten durch geeignete Gegenbeispiele.

(a)  $[f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in \Omega(g_2(n))] \implies f_1(n) \cdot g_2(n) \in \mathcal{O}(g_1(n) \cdot f_2(n))$

(b)  $[f_1(n) \in \Omega(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in o(g_2(n))] \implies f_1(n) + f_2(n) \in \Omega(g_1(n) + g_2(n))$

(c)  $[f_1(n) \in \Omega(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in o(g_2(n))] \implies f_1(n) + f_2(n) \in o(g_1(n) + g_2(n))$