Mathematik für Informatiker II

Klaus Kriegel, Tobias Lenz

Abgabe 24.6.2005, spätestens 12:00 Uhr

Aufgabe 1 Asymptotisches Wachstum (3+3 Punkte)

Das Wachstum der Exponentialfunktion, der identischen Funktion und der Logarithmusfunktion soll verglichen werden. Wir beschränken uns dabei auf die Basis $a = 2$.

a) Zeigen Sie mit elementaren Mitteln, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$ ist. Nutzen Sie die folgenden Teilschritte, wobei Sie vorausetzen können, dass die Funktionen 2^x und $\log_2 x$ streng monoton wachsend sind:

i) Offensichtlich ist für $n = 4$ die Ungleichung $n \leq 2^{n/2}$ erfüllt. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass diese Ungleichung dann auch für alle $n \geq 4$ erfüllt ist.

ii) Begründen Sie, das für jedes $K > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_1$ $K < 2^{n/2} = \sqrt{2^n}$

iii) Welche Folgerung können Sie für alle $n \geq n_0 := max(4, n_1)$ ziehen?

b) Nutzen Sie das obige Beweisschema, um $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log_2 n} = \infty$ zu zeigen.

Aufgabe 2 $\mathcal{O}$-Notation (5 Punkte)

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn f vor g steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung (z.B. welche Umformungen oder Regeln angewendet wurden).

$$f_1(n) = (3)^{\log_9 n} \qquad f_2(n) = n^2 \cdot 2^{2n+1} \qquad f_3(n) = \log_2 4^{n+2}$$

$$f_4(n) = 4^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 4^{n+\log_2 n} \qquad f_6(n) = \sqrt{6n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben, d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$, und geben Sie eine kurze Begründung an.

Aufgabe 3 Ableitungen (2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Funktionsterme der Ableitungen so weit, wie möglich:

$$a) \quad f(x) = \sin^3 x - 3\sin x$$

$$b) \quad g(x) = \sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}$$

$$c) \quad h(x) = x^2 \cdot \sin x^2 + \cos x^2$$