3. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 05/06**

Klaus Kriegel, Britta Denner-Broser **Abgabe: 7.11.2005, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Das folgende Programm berechnet den größten Wert in einem Array $A[1,...,n]$.

```
1 max = -∞
2 for i = 1 to n do
3     if A[i] > max then
4         max = A[i]
```

Bestimmen Sie, wie oft die Zuweisung in Zeile 4 im Mittel ausgeführt wird, unter der Annahme, dass die Elemente in A zufällig aus dem Intervall $[0,1]$ gewählt werden. Lösen Sie dazu folgende Teilaufgaben:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl x, die zufällig aus einer Menge von n verschiedenen Zahlen gezogen wird, die größte Zahl in dieser Menge ist?

b) Was ist für $1 \leq i \leq n$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zeile 4 ausgeführt wird?

c) Sei S_i eine Zufallsvariable, die angibt, wie oft Zeile 4 in der i-ten Iteration der **for**-Schleife ausgeführt wird ($i = 1,...,n$). Was ist der Erwartungswert $E(S_i)$ dieser Zufallsvariable?

d) Sei $S = S_1 + ... + S_n$ eine Zufallsvariable, die angibt, wie oft Zeile 4 insgesamt auf einer Eingabe A durchlaufen wird. Zeigen Sie, dass $E(S) \in \Theta(\log n)$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

In einem Mannschaftswettbewerb schießen drei Schützen auf drei gleichzeitig aufsteigende Tontauben, wobei jeder Schütze einen Schuss auf eine der drei Tauben abgeben kann. Die Aufgabe ist erfült, wenn in einer Runde alle drei Tauben getroffen sind. Andernfalls geht es in die nächste Runde mit drei neuen Tontauben. Man geht davon aus, dass jeder Schütze die Wahl seines Ziels in jeder Runde unabhängig von den Vorrunden und von der aktuellen Entscheidung der Mitspieler zufällig und gleichverteilt trifft.

a) Angenommen, alle Schützen treffen garantiert ihr Ziel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Runde erfolgreich endet?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aufgabe nach genau k Runden erfüllt ist ($k = 1, 2, \ldots$) und wie hoch ist der Erwartungswert für die Anzahl der Runden?

c) Angenommen jeder Schütze muss pro Runde einen Euro einzahlen und bekommt am Ende fünf Euro ausgezahlt. Wie hoch ist der erwartete Gewinn (oder Verlust)?

d) Analysieren Sie die Situation für eine zweite Gruppe von Schützen, bei der die Trefferwahrscheinlichkeit jeweils 0.5 ist. Bestimmen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine Runde und die erwartete Rundenzahl in einem Spiel.

e) Um ihre Chancen zu erhöhen schummelt die zweite Gruppe ein wenig. Schütze 1 und Schütze 2 treffen eine Verabredung, so dass sie in jedem Fall zwei verschiedene Tauben wählen. Spieler 3 wählt weiterhin unabhängig und gleichverteilt. Wie verändert sich die erwartete Rundenzahl.

Aufgabe 3: (3+1 Punkte)

Ein Würfel wird so lange geworfen bis zweimal hintereinander eine ungerade Zahl fällt (z.B. $1, 2, 4, 6, 5, 4, 1, 5$ oder $2, 6, 4, 5, 2, 3, 1$). Die einzelnen Würfe sind gleichverteilt und unabhängig.

a) Bestimmen Sie für ein gegebenes $n \geq 2$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel über genau n Runden geht.
b) Bestimmen Sie diesem Wert für $n = 10$ als Bruch.
Hinweise: 1) Es seien $p(n)$ (bzw. $q(n)$) die Wahrscheinlichkeiten, das in einer Folge von n Würfen keine zwei ungeraden Zahlen hintereinander fallen und die Folge mit einer ungeraden (bzw. geraden) Zahl endet. Bestimmen Sie die Anfangswerte für $n = 1, 2$ und stellen Sie Rekursionen für $p(n)$ und $q(n)$ auf. Wer dabei auf eine sehr bekannte rekursive Folge aus dem ersten Semester stößt, ist auf dem richtigen Weg.
2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der gesuchten Wahrscheinlichkeit und den Werten $p(n)$?