4. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 05/06**

Klaus Kriegel, Britta Denner-Broser **Abgabe: 14.11.2005, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum der Punkte $P = (a, b)$ aus dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ mit der Gleichverteilung und die Zufallsvariable X, die jedem Punkt den sogenannten Manhattan-Abstand zum Koordinatenursprung zuordnet, d.h. $X(a, b) = a + b$.

a) Bestimmen Sie die Werte der Verteilungsfunktion $\mathrm{F}_X(0.5)$, $\mathrm{F}_X(1)$, und $\mathrm{F}_X(1.5)$. Eine kleine Skizze sollte helfen!

b) Geben Sie eine allgemeine Beschreibung der Verteilungsfunktion F_X.

c) Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X der Zufallsvariablen X.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$. Überlegen Sie dazu, an welcher Stelle man das Integral zerlegen sollte.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Lösen Sie die Teilaufgaben b) bis d) aus der ersten Aufgabe noch einmal für zufällige gleichverteilte Punkte aus den Rechteck $[0,3] \times [0,1]$. Die Zufallsvariable X ist wieder durch $X(a, b) = a + b$ definiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Wir betrachten den durch zwei unabhängige und gleichverteilte Würfel erzeugten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\ \mathrm{Pr})$, d.h. jedes $(a, b) \in \Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Wir definieren die Zufallsvariablen X, Y, Z wie folgt:

$$\begin{aligned} X(a, b) &= 6(a-1) + b \\ Y(a, b) &= max(a, b) \\ Z(a, b) &= a \cdot b \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die diskreten Verteilungsfunktionen $\mathrm{Pr}_X, \mathrm{Pr}_Y$ und Pr_Z der drei Variablen und bestimmen Sie die Erwartungswerte $E(X),\ E(Y),\ E(Z)$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable, die gleichverteilt über dem Intervall $\Omega = [-2, 2]$ ist (d.h. die Dichtefunktion von X ist 0.25 im Intervall $[-2, 2]$ und 0 sonst).

a) Bestimmen Sie für die Zufallsvariable $Y = X^2$ den Erwartungswert $E(Y)$.

b) Beschreiben Sie die Verteilung und die Dichtefunktion der Variable $Y = X^2$.

c) Bestimmen Sie die Varianzen $Var(X)$ und $Var(Y)$.

d) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Pr}(Y \geq 2)$ mit der Markow-Ungleichung ab.

e) Bestimmen Sie den exakten Wert von $\mathrm{Pr}(Y \geq 2)$. Das Ergebnis ist ein arithmetischer Ausdruck zu dessen Auswertung Sie (ausnahmsweise) einen Taschenrechner gut verwenden können.