

Aufgabe 1:

(3+2+1 Punkte)

- a) Zeigen Sie durch Überprüfung der Vektorraumaxiome, dass \mathbb{C} ein Vektorraum über \mathbb{R} ist, und geben Sie eine Basis an.
- b) Welche Dimension hat der Vektorraum \mathbb{C}^2 über \mathbb{R} ? Als Operationen werden die komponentenweise Addition bzw. die Multiplikation aller Komponenten mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ vereinbart. Begründen Sie Ihre Antwort durch Angabe einer Basis.
- c) Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{R}^2 mit komponentenweiser Addition und Multiplikation **kein** Körper ist. Welche Eigenschaft wird verletzt?

Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{R}^n ? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $\{\vec{x} \mid \vec{x} = (x, \dots, x), x \in \mathbb{R}\}$,
2. $\{\vec{x} \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
3. $\{\vec{x} \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_n = 1\}$,
4. $\{\vec{x} \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$,
5. $\{\vec{x} \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_{n-1} = x_n\}, n \geq 2$.

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum über \mathbb{R} . Welche der folgenden drei Mengen von Polynomen sind linear unabhängig? Begründen Sie die Antworten an Hand der Definition!

1. $M_1 = \{x^2, (x+1)^2, (x+2)^2\}$
2. $M_2 = \{x, x+1, x+2\}$
3. $M_3 = \{1, x+1, (x+2)^2, (x+3)^3\}$

Aufgabe 4:

(2+2 Punkte)

Wir betrachten die reellen Zahlen als Vektorraum über \mathbb{Q} .

- a) Begründen Sie, dass die Menge $\{\sqrt{2}, \sqrt{4}\}$ linear unabhängig ist, aber die Menge $\{\sqrt{2}, \sqrt{8}\}$ linear abhängig ist.
- b) Ist die Menge $\{\sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ linear unabhängig oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie können bei den Begründungen den Fakt verwenden, dass die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl n immer dann irrational ist, wenn n keine Quadratzahl ist.