

**Aufgabe 1:**

(3+2 Punkte)

$$\text{Es sei } \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist.b) Ersetzen Sie zwei geeignete Vektoren aus  $\mathcal{B}$  durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .**Aufgabe 2:**

(4 Punkte)

Sei  $V$  ein Vektorraum mit  $\dim V = n$ . Beweisen Sie folgende Aussagen. Sie können dazu alle in der Vorlesung gezeigten Sätze verwenden.

- Weniger als  $n$  Vektoren können  $V$  nicht erzeugen.
- Mehr als  $n$  Vektoren sind linear abhängig.
- Jedes Erzeugendensystem von  $n$  Vektoren ist linear unabhängig, also eine Basis.
- Jede linear unabhängige Menge von  $n$  Vektoren ist ein Erzeugendensystem von  $V$ , also eine Basis.

**Aufgabe 3:**

(3+3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Abbildungen linear sind, und bestimmen Sie jeweils den Kern und das Bild (dazu gehört natürlich immer eine kurze Begründung)!

a) 
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (0, x + y)$$

b) 
$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y + z)$$

**Aufgabe 4:**

(1+2+4 Punkte)

Wir betrachten wie auf dem letzten Übungsblatt den Polynomring  $\mathbb{R}[x]$  als Vektorraum über  $\mathbb{R}$  führen zwei Abbildungen  $f, g: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ein, die auf einem Polynom  $p(x)$  wie folgt wirken:

$$f(p(x)) := x \cdot p(x) \quad \text{und} \quad g(p(x)) := \frac{p(x) - p(0)}{x}$$

- Geben Sie eine neue Beschreibung der Abbildungen, indem Sie die Polynome  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$  und  $g(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$  mit ihren Koeffizienten darstellen.
- Zeigen Sie, dass beide Abbildungen linear sind.
- Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Abbildungen.