

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Stellen Sie fest, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind. Bilden Sie – falls möglich – die inverse Matrix mit den Gauß-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}_7) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}_5)$$

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Bestimmen Sie nach dem im konstruktiven Beweis des Chinesischen Restesatzes vorgegebenen Schema eine Zahl $0 \leq x < 900$, welche die folgenden Kongruenzen erfüllt! Um Zeit zu sparen, kann man hier auch mal den Taschenrechner zu Hilfe nehmen.

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{25} \\ x &\equiv 10 \pmod{36} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(3 + 2 Punkte)

a) Sei V, \langle, \rangle ein Euklidischer Vektorraum, $\vec{w} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor aus V und $U = \vec{w}^\perp$ das Orthogonalkomplement von \vec{w} . Beweisen Sie, dass man dann die Orthogonalprojektion auf U auch mit der folgenden Formel definieren kann:

$$P_U(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} \vec{w}$$

Sehen Sie sich dazu noch einmal die Definition von Orthogonalprojektionen an.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Orthogonalprojektion auf den Unterraum $U = (2, 1, -2)^\perp$.

Aufgabe 4:

(2 + 3 Punkte)

Über einen Endomorphismus $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sei folgendes bekannt:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &\perp \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \langle f(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = 1 \\ \langle f(\vec{e}_2), \vec{e}_3 \rangle &= 2 \end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{v} = e_1 + e_2$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Der Vektor $\vec{w} = e_2 + e_3$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 3.

a) Bestimmen Sie die Matrix A der Abbildung f .

b) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie, soweit das möglich ist, eine Diagonalmatrix.

Aufgabe 5:

(2 Punkte)

Sei A eine Matrix deren Spalten eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Zeigen Sie dass dann der Betrag von $\det(A)$ gleich 1 ist.