Mathematik für Informatiker III im WS 05/06

Musterlösung zur 10. Übung, Aufgaben 1 und 4

erstellt von K. Kriegel

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen, stellen Sie fest, welche von ihnen invertierbar sind und bestimmen Sie bei positiver Antwort die inverse Matrix **ohne** die Determinantenformel zu verwenden.

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir berechnen zuerst den Rang durch Umformung in eine obere Dreiecksmatrix und schreiben für jede Stufe eine Zwischenlösung. Falls die Matrix vollen Rang hat, werden die einzelnen Schritte noch einmal detailliert ausgeführt und die entsprechenden elementaren Zeilenumformungen parallel auf die Einheitsmatrix angewendet.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat den Rang 3 und ist damit nicht invertierbar.

$$b)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Rang 3 und ist damit invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (Z1) \leftrightarrow (Z3) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (Z2) = 2 * (Z1) + (Z2) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (Z3) = -(Z2) + (Z3) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (Z2) = 2.5 * (Z3) + (Z2) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (Z1) = (Z3) + (Z1) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (Z1) = -(Z2) + (Z1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2.5 & -1.5 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} (Z1) = -(Z1) \\ (Z3) = -0.5(Z3) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & 2 \\ 2.5 & -1.5 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & -2 \\ 2.5 & -1.5 & -3 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Aufgabe 2: Eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix A der Abbildung f bezüglich der Standardbasis und invertieren Sie A mit der Determinantenformel. Überprüfen Sie die Korrektheit, indem Sie die Matrix der Umkehrfunktion f^{-1} direkt bestimmen.

Lösung: Bezeichnet man die drei Basisvektoren, auf denen f in der Aufgabenstellung definiert ist, als $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$, dann kann man die Basisvektoren der Standardbasis wie folgt darstellen:

$$\vec{e_1} = \vec{v_1} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v_2} - \vec{v_1} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v_3} - \vec{v_2}$$

und der Linearität von f ergibt sich

$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e_2}) = f(\vec{v_2}) - f(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e_3}) = f(\vec{v_3}) - f(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus ist $det(A) = 0-(-1) = 1$ und damit ist die Komplementärmatrix auch die inverse Matrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -(0) & 0 \\ -(-1) & -1 & -(-1) \\ 1 & -(1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Probe durch direkte Bestimmung der Umkehrmatrix erfolgt wie oben. Man stellt die Vektoren der Standardbasis als Linearkombinationen der Bildvektoren dar und berechnet darüber $f^{-1}(\vec{e_i})$:

$$f^{-1}(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f^{-1}(\vec{e_2}) = f^{-1}(\vec{v_2}) - f^{-1}(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(\vec{e_3}) = f^{-1}(\vec{v_3}) - f^{-1}(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wie Sie leicht nachrechnen können, ist in diesem Fall $A^{-1} = A^2$. Geben Sie dafür eine Begründung, ohne die zu A inverse Matrix direkt zu bestimmen.

Lösung: Bezeichnet man die drei Basisvektoren, auf denen f in der Aufgabenstellung definiert ist, als $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$, dann kann man die Definition als $f(\vec{v_1}) = \vec{v_2}$, $f(\vec{v_2}) = \vec{v_3}$, $f(\vec{v_3}) = \vec{v_1}$ lesen, d.h. diese Basisvektoren werden zyklisch vertauscht. Daruas folgt, dass die Abbildung $g = f^3$ (dreimalige Anwendung von f) die Basisvektoren identisch abbbildet und damit die identische Abbildung ist. Übertragen auf die entsprechenden Matrizen ergibt das $E_n = A^3 = A \cdot A^2$, also $A^{-1} = A^2$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Es seinen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ drei quadratische Matrizen und $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die dazugehörigen linearen Abbildungen. Übersetzen Sie die folgenden Fragestellungen in die Sprache von linearen Gleichungssystemen. Man muss dazu nicht viel rechnen, sondern nur Vektorenmengen als Lösungsmengen von bestimmten Gleichungssystemen beschrieben. Zum Teil muss man dabei auch neue Matrizen definieren.

a) Menge der Vektoren, die unter den Abbildungen f und g das gleiche Bild haben.

b) Menge der Vektoren, deren Bild unter g im Kern von f liegt.

c) Menge der Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden, wenn man auf sie erst die Abbilddung f und dann die Abbildung g anwendet.

d) Menge der Vektoren, die unter den Abbildungen f und g auf zwei zueinander inverse Vektoren (d.h. invers bezüglich Vektoraddition) abgebildet werden.

e) Menge der Vektoren, die in den Kernen von f und g liegen.

Lösung:

a) Wegen $f(\vec{v}) = g(\vec{v}) \Longleftrightarrow A\vec{v} = B\vec{v} \Longleftrightarrow (A-B)\vec{v} = \vec{0}$ kann man die gesuchte Menge durch Lös $\left(A - B \middle| \vec{0}\right)$ beschreiben.

b) Das Bild eines Vektors $\vec{v}$ unter g liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(g(\vec{v})) = \vec{0}$. Diese Menge kann durch Lös $\left(A \cdot B \;\middle|\; \vec{0}\right)$ beschrieben werden.

c) Wegen $g(f(\vec{v})) = \vec{v}) \iff (B \cdot A)\vec{v} = E_n\vec{v} \iff (B \cdot A - E_n)\vec{v} = \vec{0}$ kann man die gesuchte Menge durch Lös $\left(B \cdot A - E_n \;\middle|\; \vec{0}\right)$ beschreiben.

d) Wegen $f(\vec{v}) = -g(\vec{v}) \iff A\vec{v} = -B\vec{v} \iff (A + B)\vec{v} = \vec{0}$ kann man die gesuchte Menge durch Lös $\left(A + B \middle| \vec{0}\right)$ beschreiben.

e) Ein Vektor $\vec{v}$ liegt genau dann in den Kernen von f und g wenn er Lösungsvektor der Gleichungssysteme $(A|\vec{0})$ und $(B|\vec{0})$: Sie also C die Matrix, die durch übereinander Stellen von A und B entsteht, dann ergibt sich die gesuchte Menge als

$$\text{Lös}\left(C \middle| \vec{0}\right) = \text{Lös}\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \middle| \vec{0}\right)$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{ccccccc} & +x_2 & -2x_3 & & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ & +x_2 & & +2x_4 & = & 2 \\ & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

Man berechnet zuerst die Determinante der Koeffizientenmatrix. Es bietet sich an, nach der ersten Spalte zu entwickeln, weil dort drei Nullen sind. Danach kann man die Regel von Sarrus verwenden:

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (0+4+0-(0-2+4)) = -4$$

Damit hat das LGS eine eindeutige Lösung für deren Berechnung man die Cramersche Regel anwenden kann.

Die Matrizen A_j $(j = 1, \ldots, 4)$ entstehen durch Austausch der j-ten Spalte von A gegen den Spaltenvektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems. Außer bei A_1 bietet sich wieder die Entwicklung nach der ersten Spalte an. Für A_1 wenden wir die Umformung in die obere Dreiecksform an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9/7 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $det(A_1) = 9$.

$$det(A_2) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (0 - (-4 + 4)) = 0$$

$$det(A_3) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (2 - 2 - (1)) = 2$$

$$det(A_4) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot (4 + 2 - (4)) = -4$$

Die Lösung des Gleichungssystem ergibt sich aus den Quotienten $\frac{det(A_i)}{det(A)}$:

$$x_1 = \frac{9}{-4} = -2.25 \qquad x_2 = \frac{0}{-4} = 0 \qquad x_3 = \frac{2}{-4} = -0.5 \qquad x_4 = \frac{-4}{-4} = 1$$