Fachbereich Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. R. Klein, D. Ruprecht, S. Vater

1. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SS 2006

`http://www.math.fu-berlin.de/rd/we-02/numerik/LEHRE/SS06/NUMERIKI/`

Abgabe: bis Montag, den 8. Mai, 13.00 Uhr ins Fach von Steffen Galan

1. Aufgabe *Jacobi & Gauss-Seidel* (8 Punkte)
In der Vorlesung haben Sie Fixpunktiterationen der Form

$$Mx_{k+1} = (M - A)x_k + b, \qquad x_0, b \in \mathbb{R}^n, \quad M, A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

kennengelernt.

a) Programmieren Sie das Jacobi–Verfahren ($M = \operatorname{diag}(A)$) für das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = (1, 1, \dots, 1)^T$$

und $n = 10$.

b) Programmieren Sie das Gauß–Seidel–Verfahren für das Gleichungssystem aus Teil 1.

c) Vergleichen Sie die Konvergenzraten der Verfahren aus Teil 1 und 2 mit unterschiedlichen Startwerten. Iterieren Sie dazu bis der Iterationsfehler kleiner als TOL $= 10^{-12}$ ist. Stellen Sie graphisch die Konvergenzrate über die Anzahl der Iterationsschritte dar. Was beobachten Sie?

Hinweis: Für ein Gleichungssystem $Ax = b$ liefert der Matlabbefehl `x = A\b` die exakte Lösung. Dieser Befehl soll allerdings *nur* zum Bestimmen des Fehlers verwendet werden. Zum Aufstellen der Matrix können Sie in Matlab die Funktionen `spdiags` und `ones` benutzen. Lesen Sie dazu die Hilfe.

2. Aufgabe *Fixpunktiteration in 2D* (4 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F in

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\} \quad .$$

b) Berechnen Sie den Fixpunkt näherungsweise durch Fixpunktiteration, bis sich Ihre berechneten Näherungen nicht mehr ändern (aber höchstens mit einer Genauigkeit von 10^{-30}) und bestätigen Sie ihre letzte Näherung durch eine a posteriori-Fehlerabschätzung. Dokumentieren Sie Ihre Näherungen.

Hinweis: Um den Fixpunkt zu berechnen, empfiehlt es sich, in einer geeigneten Programmiersprache ein kurzes Programm zu schreiben.

3. Aufgabe *Eine fixpunktfreie Selbstabbildung* (4 Punkte)
Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Zeigen Sie:

a) $g(M) \subset M$

b) $|g(x) - g(y)| < |x - y| \; \forall x, y \in M, \, x \neq y$

c) g besitzt *keinen* Fixpunkt in M

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

Allgemeine Hinweise

Die Bearbeitung der Übungszettel soll in Gruppen von zwei Personen erfolgen. Den Programm-Code von Matlab-Programmen bitte an den Tutor Steffen Galan (`galan@math.fu-berlin.de`) schicken.