

11. Übung zur Vorlesung

NUMERIK I

SS 2006

<http://www.math.fu-berlin.de/rd/we-02/numerik/LEHRE/SS06/NUMERIKI/>

Abgabe: bis Montag, den 24. Juli, 13.00 Uhr ins Fach von Steffen Galan

Bemerkung: Die Punkte für diesen Zettel zählen als zusätzliche und sind für all diejenigen gedacht, die noch nicht genügend Punkte haben.

1. Aufgabe *nicht genügend Konsistenz...* (2 Punkte)

Betrachten Sie ein explizites Einschrittverfahren der Form

$$\psi^\tau x = x + \tau\gamma_1 f(x) + \tau\gamma_2 f(x + \tau\beta f(x))$$

Zeigen Sie, dass durch keine Wahl von γ_2 eine Konsistenzordnung $p = 3$ erreicht werden kann.

2. Aufgabe *zentrierte Differenzen* (4 Punkte)

Gegeben sei das numerische Verfahren, welches durch die Diskretisierung

$$\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} \approx \dot{y}(t) = f(y)$$

entsteht.

- a) Bestimmen Sie den Diskretisierungsfehler

$$\tau(t, h, f) = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} - f(y)$$

und seine Konsistenzordnung.

- b) Würden Sie dieses Verfahren dem expliziten Euler-Verfahren vorziehen?
c) Welche Schwierigkeit tritt bei dem Start des Verfahrens auf? Wie kann man diese Schwierigkeit beheben?

3. Aufgabe *gut eingebettet!* (2 Punkte)

Durch

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & \\ & 1/2 & 0 & \\ & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad (1)$$

ist ein Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 3$ zur Lösung von Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

gegeben. Konstruieren Sie ein in (1) eingebettetes Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 2$, das keine zusätzlichen Funktionswerte benötigt.

4. Aufgabe Runge Kutta praktisch (8 Punkte)

Implementieren Sie eine allgemeine Integrationsroutine für die expliziten Runge–Kutta–Verfahren zur Integration eines Anfangswertproblems

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Die Eingabe–Parameter sollten sein:

- t_0 : der Anfangszeitpunkt,
- T : der Endzeitpunkt,
- x_0 : der Vektor der Anfangswerte,
- f : `matlab`–Funktion zur Berechnung der rechten Seite,
- N : Anzahl der Integrationsschritte mit der Schrittweite $\tau = (T - t_0)/N$,
- \mathcal{A}, b : Butcherschema des entsprechenden Verfahren.

a) Wenden Sie das Programm auf das AWP

$$x' = x, \quad x(0) = 1$$

an und testen Sie es.

Hinweis für den Test: Für das Runge–Verfahren der Ordnung 2 ergibt sich mit $T = 1$ und $N = 10$ ein Gesamtfehler

$$|x_{10} - e| \approx 0.004201.$$

b) Vergleichen Sie das klassische Runge–Kutta–Verfahren (4–stufig) und den expliziten Euler am Beispiel des harmonischen Oszillators:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

mit dem Anfangswert $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$. Rechnen Sie bis zur Zeit $T = 30$ und stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar. Welche Schrittweiten τ muß man für die Verfahren wählen?

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Bearbeitung der Übungszettel soll in Gruppen von genau zwei Personen erfolgen. Den Programmier-Code von Matlab-Programmen bitte an den Tutor Steffen Galan (galan@math.fu-berlin.de) schicken. Der jeweils erste, der einen Fehler im Skript findet, bekommt einen Sonderpunkt.