

5. Übung zur Vorlesung Informatik A

Ausgabe: 17.11.2006 – Abgabe: 29.11.2006

Aufgabe 1

zur Bestimmung des $ggT(m,n)$: sei o.b.d.A. $m \geq n$:

$$\begin{aligned}m &= x' * n + r_1 \\n &= x'' * r_1 + r_2 \\r_1 &= x''' * r_2 + r_3 \quad \dots \quad r_k = ggT(m, n)\end{aligned}$$

Dann ist $r_k = r_{k-2} - x * r_{k-1}$

- Induktionsanfang: $k = 1$: $r_1 = 0$ und n ist Teiler von m und somit existiert die Darstellung $r_1 = ggT(m, n) = a * m + b * n$
- Induktionsvoraussetzung: Mit kleiner gleich k Divisionen existiert eine Darstellung des $ggT(m, n)$ als Linearkombination von m und n . $ggT(m, n) = a * m + b * n$
- Induktionsschritt: $k \rightarrow k + 1$ und $ggT(m, n) = r_{k+1}$

$$r_{k+1} = r_{k-1} - x * r_k$$

nach IV existieren Darstellung von r_{k-1}, r_k :

$$\begin{aligned}r_{k+1} &= (a * m + b * n) - x(a' * m + b' * n) \leftrightarrow a * m + b * n - a' * x * m - b' * x * n \leftrightarrow \\&(a - a' * x) * m + (b - b' * x) * n\end{aligned}$$

Aufgabe 3

1. zu Zeigen: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n \geq 2$ und $0 < k < n$

- Kombinatorisch:

Sei A eine n -elementige, nicht leere Menge, von der wir Teilmengen bilden wollen. Dazu nehmen wir ein Element a aus A heraus. $A - \{a\}$ ist eine $(n - 1)$ -elementige Menge. Jede k -elementige Teilmenge von A , die a enthält, enthält $k - 1$ Elemente aus $A - \{a\}$. Also gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ solcher Teilmengen.

Jede k -elementige Teilmenge von A , die a nicht enthält, enthält k Elemente aus $A - \{a\}$. Also gibt es $\binom{n-1}{k}$ solcher Teilmengen. Damit ergibt sich die Anzahl der k -elementigen Teilmengen als Summe von $\binom{n-1}{k-1}$ und $\binom{n-1}{k}$

- Rechnerisch:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n*(n-1)*\dots*(n-k+1)}{k!} = \frac{(k+n-1)*(n-1)*\dots*(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{k*(n-1)*\dots*(n-k+1)}{k!} + \frac{(n-k)*(n-1)*\dots*(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)*\dots*(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)*\dots*(n-k+1)*(n-k)}{k!} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

2. Wir nehmen an $d = n - k \leftrightarrow n = k + d$, es ist zu zeigen:

$$\forall d \in \mathbb{N} : \binom{k+d}{k} = \sum_{m=k-1}^{k+d-1} \binom{m}{k-1}$$

- Induktionsanfang: $d = 1$

linke Seite:

$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = 1 + \binom{k}{k-1}$$

rechte Seite:

$$\sum_{m=k-1}^{k+1-1} \binom{m}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} = 1 + \binom{k}{k-1}$$

Die Behauptung gilt also für $d = 1$.

- Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\binom{k+d}{k} = \sum_{m=k-1}^{k+d-1} \binom{m}{k-1}$ für ein $d \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt von d nach $d + 1$: Es ist zu zeigen:

$$\binom{k+d+1}{k} = \sum_{m=k-1}^{k+d} \binom{m}{k-1}$$

$$\sum_{m=k-1}^{k+d} \binom{m}{k-1} = \sum_{m=k-1}^{k+d-1} \binom{m}{k-1} + \binom{k+d}{k-1} \stackrel{IV}{=} \binom{k+d}{k} + \binom{k+d}{k-1} = \binom{k+d+1}{k}$$