Aufgabe 3

Sei im Folgenden `binom(a, b)` eine Funktion, die die Binomialkoeffizienten rekursiv berechnet.

- a)

    1. Der Aufruf zu Beginn (ein Aufruf mit $a = n$) „erzeugt“ zwei weitere Aufrufe (zwei Aufrufe mit $a = n - 1$), dabei wird der erste Parameter dekrementiert. Von diesen beiden Aufrufen erzeugt der zweite keinen weiteren, denn per Rekursionsanker gibt er den Wert 1 zurück. Der erste jedoch erzeugt zwei weitere Funktionsaufrufe, wobei der erste Parameter wieder dekrementiert wird.

    $$\underbrace{\binom{n}{1}}_{0} = \underbrace{\binom{n-1}{1}}_{1} + \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{2} = \overbrace{\underbrace{\binom{n-2}{1}}_{3} + \underbrace{\binom{n-2}{0}}_{4}}^{\text{von } 1} +1 = \overbrace{\underbrace{\binom{n-3}{1}}_{5} + \underbrace{\binom{n-3}{0}}_{6}}^{\text{von } 3} +1+1 = \dots$$

    Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis $a = 1$ ist (zwei Aufrufe mit $a = 1$), da dann beide aufgerufenen Funktionen auf den Rekursionsanker passen (`binom(1, 1)` bzw. `binom(1, 0)`). Insgesamt werden folglich $1 + 2 \cdot (n - 1)$ Funktionen aufgerufen.

    2. Der Aufruf zu Beginn (ein Aufruf mit $a = n$) „erzeugt“ zwei weitere Aufrufe (zwei Aufrufe mit $a = n - 1$), dabei wird der erste Parameter dekrementiert. Von diesen beiden Aufrufen erzeugt der erste keinen weiteren, denn per Rekursionsanker gibt er den Wert 1 zurück. Der zweite jedoch erzeugt zwei weitere Funktionsaufrufe, wobei der erste und auch der zweite Parameter wieder dekrementiert werden.

    $$\underbrace{\binom{n}{n-1}}_{0} = \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{1} + \underbrace{\binom{n-1}{n-2}}_{2} = 1+\overbrace{\underbrace{\binom{n-2}{n-2}}_{3} + \underbrace{\binom{n-2}{n-3}}_{4}}^{\text{von } 2} = 1+1+\overbrace{\underbrace{\binom{n-3}{n-3}}_{5} + \underbrace{\binom{n-3}{n-4}}_{6}}^{\text{von } 4} = \dots$$

    Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis $a = 1$ ist (zwei Aufrufe mit $a = 1$), da dann beide aufgerufenen Funktionen auf den Rekursionsanker passen (`binom(1, 1)` bzw. `binom(1, 0)`). Insgesamt werden folglich $1 + 2 \cdot (n - 1)$ Funktionen aufgerufen.

    3. Im Folgenden sei die Tiefe des Rekursionsbaumes mit d bezeichnet. Der erste Funktionsaufruf (d. h. $a = n$) hat die Tiefe 1, es gilt also $a = n + 1 - d$. Bei $d = 2$ werden zwei Funktionsaufrufe erzeugt, es gilt $a = n - 1$. Der zweite dieser Funktionsaufrufe erzeugt den aus Teil (a) bekannten Baum des Typs `binom(n-1, 1)`, braucht also $1 + 2 \cdot (n - 2)$ weitere Aufrufe. Der erste Aufruf erzeugt wiederum zwei Funktionsaufrufe.

    $$\overbrace{\binom{n}{2}}^{d=1} = \overbrace{\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}}^{d=2} = \dots$$

    Allgemein gilt: Auf der Ebene mit der Tiefe $d > 1$ wird ein Baum aus $1 + 2 \cdot (a - 1) = 1 + 2 \cdot (n - d)$ Funktionsaufrufen erzeugt, den wir uns nicht weiter angucken, und ein weiterer Funktionsaufruf. Dies wird nur fortgesetzt bis $d = n - 1$, d. h. $a = 2$, denn dort erzeugt der erste Funktionsaufruf keine weiteren Kinder mehr. Insgesamt benötigt man also

$$1+\sum_{d=2}^{n-1}\big(1+1+2\cdot(n-d)\big) = 1+2(n-2)+\sum_{d=2}^{n-1}\big(2\cdot(n-d)\big) = 1+2n-4+\sum_{d=2}^{n-1}2n-\sum_{d=2}^{n-1}2d$$
$$= 1+2n-4+(n-2)\cdot 2n-\left(\sum_{d=1}^{n-1}(2d)-2\right) = 2n-3+2n^2-4n-\big(n(n-1)-2\big)$$
$$= 2n-1+2n^2-4n-n^2+n+2 = n^2-n-1$$

Funktionsaufrufe.

- b)

  Die Aussage wird per Induktion über n gezeigt:

  Induktionsanfang: $(n = 1)$
  Nach Aufgabe 3a) wissen wir, dass $\binom{2}{1}$ $1 + 2(2 - 1) = 3$ Aufrufe benötigt, und da $2^1 = 2 \leq 3$ gilt die Aussage für $n = 1$.
  Induktionsvoraussetzung:
  Es werden mindestens 2^n viele Aufrufe benötigt um $\binom{2\cdot n}{n}$ rekursiv zu berechnen.
  Induktionsschritt:
  Es ist zu zeigen, dass um $\binom{2\cdot(n+1)}{n+1}$ rekursiv zu berechnen mindesten 2^{n+1} viele Aufrufe notwendig sind. Man betrachte nun den Anfang der rekursiven Berechnung:

$$\begin{aligned}\binom{2\cdot(n+1)}{n2} &= \binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n}\\ &= \binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}\end{aligned}$$

  Nun kann man nach der Induktionsvoraussetzung die Anzahl der Aufrufe für den zweiten und dritten Summand jeweils durch 2^n abschätzen und die Anzahl der Aufrufe für den ersten und vierten Summanden sind auf jeden Fall mindestens Null.
  Also ergibt sich insgesammt eine Anzahl von mindestens $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ vielen Aufrufen, und genau das war zu zeigen.