Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
André Schulz

Ws 2007/08

19. Oktober 2007
Abgabe: 29. Oktober 2007
vor der Vorlesung

1. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

Achtung: Für diesen ersten Aufgabenzettel steht fest, welche Aufgaben bewertet werden. Dies sind die ersten beiden Aufgaben. Die restlichen Aufgaben werden im ersten Tutorium besprochen.

1. Aufgabe (5 Punkte).
Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben und $P = \{0, 1, \ldots, m-1\}^3$ die Menge aller Punkte im dreidimensionalen Raum mit ganzzahligen Koordinaten aus dem Bereich von 0 bis $m-1$. Jedem Punkt $p = (p_x, p_y, p_z) \in P$ wird der folgende Schlüssel $k(p)$ zugeordnet:

$$k(p) = p_x \cdot m^2 + p_y \cdot m + p_z$$

a.) Gegeben sei eine Folge von n Punkten aus P, die bezüglich ihrer Schlüssel sortiert werden soll.
Skizzieren Sie, wie man die Verfahren Counting–Sort und Radix–Sort in diesem Fall anwenden kann. Es geht nicht darum, die Verfahren im Detail zu erklären, sondern zu erläutern, mit welchen Parametern (welches Feld bzw. wieviele Stufen und was passiert dort) man im konkreten Fall arbeiten sollte, um gute Laufzeiten zu erzielen.

b.) Analysieren Sie die Laufzeit beider Verfahren **in Abhängigkeit von der Eingabegröße** n unter den folgenden Voraussetzungen:

$$b1) \quad n = \Theta(\sqrt{m}) \qquad b2) \quad n = \Theta(m^2) \qquad b3) \quad n = \Theta(m^3)$$

Vergleichen Sie die analysierten Laufzeiten in den drei Fällen mit der Laufzeit von Merge–Sort. Welches oder welche Verfahren sind in dem jeweiligen Fall am besten?

2. Aufgabe (5 Punkte).
In der Vorlesung wurden bipartite Graphen vorgestellt. Schreiben Sie ein Programm (in Pseudocode), das testet ob ein gegebener Graph bipartit ist. Benutzten Sie dazu die Ihnen bekannte Breitensuche in Graphen und wandeln Sie diese geeignet ab.

Geben Sie eine asymptotische Abschätzung der Laufzeit an (worst case).

3. Aufgabe.
Wenn Professor Pugenhubel sich morgens anzieht, überlegt er sich erst, in welcher Reihenfolge er sich seinen Gürtel, sein Hemd, seine Hose, seine Jacke, seine Krawatte, seine Schuhe, seine Socken, seine Uhr und seine Unterhose anzieht. Und das ist keineswegs trivial, da einige Aktionen von anderen abhängig sind, wie folgende Übersicht zeigt:

```
Gürtel      (Hemd Hose)
Hemd        ()
Hose        (Unterhose)
Jacke       (Gürtel Krawatte)
Krawatte    (Hemd)
Schuhe      (Hose Socken Unterhose)
Socke       ()
Uhr         ()
Unterhose   ().
```

Helfen Sie Professor Pugenhubel, indem Sie ein Programm (in Pseudocode) schreiben, das als Eingabe eine Übersicht wie obige akzeptiert und als Ausgabe eine mögliche Reihenfolge der Aktionen produziert, sofern dies überhaupt möglich ist.

(a) Entwickeln Sie hierzu zunächst einen Algorithmus, der die Knoten eines gerichteten azyklischen Graphen so sortiert, dass jede Kante in dem Graphen von einem Knoten, der weiter vorne liegt, zu einem Knoten, der weiter hinten liegt, verläuft.

(b) Analysieren Sie die asymptotische Laufzeit ihres Algorithmus in Abhängigkeit von der Anzahl n der Knoten des Graphen und der Anzahl m der Kanten des Graphen.

4. Aufgabe.
Sortieren Sie folgende Ausdrücke bezüglich ihres asymptotischen Wachstums (O-Notation):

$$3^{\log_2 27}, \quad \log_2 n!, \quad n^{\log_2 n}, \quad \sqrt{n}, \quad (\log_2 n)^{\log_2 n}, \quad 2^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Begründen Sie ihre Entscheidung kurz!