Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmila Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

26. Oktober 2007
Abgabe: 5. November 2007
vor der Vorlesung

2. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Aufgabe (4 Punkte).
Auf der Menge der aufspannenden Bäume eines Graphen G definieren wir einen *Flip* als folgende Operation: Ein Flip fügt eine neue Kante in einen Baum T ein und entfernt dafür eine andere Kante, so dass ein neuer aufspannender Baum entsteht. Zeigen Sie, dass jeder aufspannende Baum aus einem gegebenen anderen durch eine Sequenz von Flips erzeugt werden kann.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+$. Ferner sei $w' : E \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $w'(e) := (w(e))^2$. Wie verhalten sich die Algorithmen von Kruskal und Dijkstra auf dem Graphen G mit Kantengewichtsfunktion w' im Vergleich zum Graphen G mit Gewichtsfunktion w?

Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn einer der Algorithmen verschiedene Ergebnisse erzielt, geben Sie ein Beispiel an. Mit verschiedenen Ergebnissen sind keine anderen numerischen Werte gemeint, sondern unterschiedliche Bäume/Pfade.

3. Aufgabe (6 Punkte).
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}^+$ so, dass alle Kantengewichte verschieden sind.

(a) Zeigen Sie, dass ein zweitleichtester aufspannender Baum von G aus dem minimal aufspannenden Baum erhalten werden kann, indem man eine einzige Kante austauscht.

(b) Formulieren Sie einen Algorithmus zum Auffinden eines zweitleichtesten aufspannenden Baumes und schätzen Sie seine Laufzeit ab.

4. Aufgabe (5 Punkte). **(Teilbarkeitsgraph)**
Wir bezeichnen mit $G_n = (V_n, E_n)$ einen gerichteten Graphen zur Beschreibung der Teilbarkeitsrelation auf den Zahlen von 1 bis n:

$$V_n = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad E_n = \{\, \{i, j\} \mid 1 \le i < j \le n \text{ und } i \text{ ist ein Teiler von } j \,\}$$

wobei das Gewicht einer Kante durch $w(\{i, j\}) = \frac{j}{i}$ festgelegt wird.

a.) Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra auf G_{12} mit dem Startknoten $s = 1$ aus, geben Sie die Reihenfolge der Entfernung der Knoten aus Q an und listen

Sie die endgültigen Werte von $d[v]$ und $\pi[v]$ für alle Knoten auf. Die Antwort ist auf Grund gleicher Schlüssel nicht eindeutig (d.h. implementierungsabhängig) – gefragt ist eine der möglichen Lösungen.

b.) Bestimmen Sie die (asymptotische) Größe von E_n und entscheiden Sie, welche der beiden in der Vorlesung besprochenen Implementierungen vorzuziehen ist (Begründung!). Analysieren Sie dafür die Laufzeit in Abhängigkeit von n.