Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmilla Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

2. November 2007
Abgabe: 12. November 2007
vor der Vorlesung

3. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Aufgabe (5 Punkte).
Modifizieren Sie den Algorithmus von Strassen so, dass er für $n \times n$ Matrizen arbeitet, wobei n keine Zweierpotenz sein muss.

Zeigen Sie, dass der modifizierte Algorithmus weiterhin in $\Theta(n^{\log 7})$ Zeit arbeitet.

2. Aufgabe (5 Punkte).
In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man Matrixmultiplikation beschleunigen kann, indem man die Multiplikation von zwei 2×2 Matrizen mit 7 "Einzelmultiplikationen" ausführt und diesen Ansatz zu einem rekursiven Algorithmus zur Multiplikation von $n \times n$ Matrizen ausbaut (zuerst nur für Zweierpotenzen, nach Aufgabe 1 auch für alle n).

Ein möglicher Ansatz zur Verbesserung dieses Ergebnisses könnte analog durch die Multiplikation von zwei 3×3 Matrizen mit weniger als 27 Einzelmultiplikationen entwickelt werden. Sei k die Zahl der Einzelmultiplikationen die notwendig sind, um die zwei 3×3 Matrizen miteinander zu multiplizieren. Für welches k führt dies zu einem Algorithmus mit Laufzeit $o(n^{\log 7})$.

3. Aufgabe (5 Punkte).
Seien A und B zwei Felder der Größe $n/2$. In diesen Feldern sind zwei *sortierte* Listen L_A (in A) und L_B (in B) von ganzen Zahlen abgespeichert. Es ist also möglich das i-t größte Element von L_A mit $A[i]$ direkt zu adressieren (analog für L_B und B).

Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der den Median der Vereinigung der Listen L_A und L_B findet (also das $n/2$-t größte Element aus $L_A \cup L_B$). Bestimmen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus.
Anmerkung: Gehen Sie davon aus, dass jede Zahl nur einmal in $L_A \cup L_B$ auftritt.

4. Aufgabe (5 Punkte).
Wir betrachten den ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunkltion $w : E \to \mathbf{R}^+$. Die Kantengewichte müssen nicht zwangsweise verschieden sein. Als Konsequenz hieraus kann es mehrere minimale Spannbäume für G geben. Sei

$$E_{min} := \{(i, j) \mid (i, j) \text{ ist Kante in } \textbf{einem} \text{ minimalen Spannbaum}\}.$$

Wir betrachten nun einen Spannbaum auf G dessen Kanten alle aus E_{min} sind. Ist dieser Baum ein minimaler Spannbaum von G? Begründen Sie ihre Antwort durch Beweis oder Gegenbeispiel.