Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmilla Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

9. November 2007
Abgabe: 19. November 2007
vor der Vorlesung

4. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Aufgabe (5 Punkte).
Ein absolut balancierter binärer Baum B mit n Knoten enthalte n verschiedene Zahlen als Knotenbeschriftungen. (Achtung, B ist i.A. kein binärer Suchbaum!) Ein Knoten wird lokales Minimum genannt, falls seine Zahl kleiner ist als die aller seiner Nachbarn.

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der ein lokales Minimum in Zeit $O(\log n)$ findet. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und dass die gewünschte Laufzeit erreicht wird.

2. Aufgabe (5 Punkte).
Wir betrachten einen rekursiven Algorithmus A, dessen Suchraum aus n Elementen besteht. In jedem Rekursionsschritt partitioniert A die Eingabe in zwei Mengen, jede dieser Mengen hat die Größe mindestens $k/4$, wobei k die Größe der Eingabe in dem aktuellen Rekursionsschritt ist. Jede der beiden Mengen wird rekursiv bearbeitet. Die Aufteilung in zwei Mengen benötigt lineare Zeit, also $O(k)$. Die Verarbeitung einer 1-elementigen Eingabe dauert konstante Zeit.

(a) (1p) Wenn wir das Master-Theorem für die Laufzeitabschätzung anwenden, bekommen wir folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) \leq 2 \cdot T\left(\frac{3n}{4}\right) + O(n) \ .$$

Bestimen Sie die obere Schranke für die Laufzeit mit Hilfe des Master-Theorems.

(b) (4p) Bestimmen Sie die Laufzeit des Algorithmus als Funktion $\Theta(f(n))$.

3. Aufgabe (5 Punkte).
Zeigen Sie, dass für jeden Baum T gilt:

(a) Es existiert ein Knoten v, so dass nach dem Entfernen von v aus T jede der entstandenen Zusammenhangskomponenten höchstens $\frac{n}{2}$ Knoten hat.

(b) Sei k der maximale Grad der Knoten in T. Es existiert eine Kante e mit der Eigenschaft, dass nach dem Entfernen von e aus T jede der entstandenen Zusammenhangskomponenten maximal $\frac{n(k-1)}{k}$ Knoten enthält.

4. Aufgabe (5 Punkte).
Die folgenden Graph-Probleme können durch iterierte Matrixmultiplikationen über

Semiringen gelöst werden, wenn man von einer dem Problem angepassten Adjazenzmatrix des Graphen ausgeht. Bestimmen Sie die zu den Problemen passenden Semiringoperationen, Adjazenzmatrixformen (welche Einträge, insbesondere auch auf der Diagonale) und Matrixpotenzen:

Problem 1: $G = (V, E)$ sei ein schlichter Graph mit n Knoten dessen Kanten Kapazitäten haben. Die Kapazität eines Wegs ist durch die geringste Kantenkapzität auf dem Weg beschränkt. Gesucht ist für alle Knotenpaare die maximale Kapazität eines Verbindungsweges.

Problem 2: $G = (V, E)$ sei ein schlichter Graph mit n Knoten und gesucht ist für jeden Knoten v die Anzahl der Dreiecke (d.h. Kreise der Länge 3), auf denen v liegt. Zwei Kreise, die sich nur durch Auswahl des Startknotens oder Richtung des Umlaufs unterscheiden, sind als gleich anzusehen.