

Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmilla Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

21. Dezember 2007
Abgabe: 14. Januar 2008
vor der Vorlesung

10. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Aufgabe (5 Punkte).

Eine deterministische Turingmaschine V heißt *Verifizierer* für eine Sprache L , wenn

$$L = \{ w \mid \exists z \leq t_V(|w|) \text{ und } \langle w, z \rangle \in L(V) \},$$

wobei $t_V(n)$ eine obere Schranke für die Laufzeit der Maschine V auf Eingaben der Länge n ist. $L(V)$ nennen wir Verifikationssprache. Wir definieren folgende Sprachklasse:

$$\text{ver-P} := \{ L \mid \text{die Verifikationssprache von } L \text{ liegt in } P \}.$$

Zeigen Sie,

$$\text{ver-P} = \text{NP}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte).

Beweisen Sie folgende Beobachtungen:

- (a) $P = \text{co-P}$,
- (b) $L \leq_p L' \Leftrightarrow \bar{L} \leq_p \bar{L}'$,
- (c) $P = \text{NP} \Rightarrow \text{NP} = \text{co-NP}$,
- (d) $L_1, L_2 \in \text{NP} \Rightarrow L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^* \in \text{NP}$,
- (e) $L_1 \cup L_2 \in \text{NP} \not\Rightarrow L_1, L_2 \in \text{NP}$.

3. Aufgabe (5 Punkte) Zeigen Sie, dass 2-SAT in P ist.

2-SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, bei der alle Klauseln aus höchstens zwei Literalen bestehen.

Frage : Gibt es eine erfüllende Belegung?

Hinweis Ersetzen Sie alle Klauseln $c_i = x \vee y$ in der Formel $\phi = \bigwedge_{i=1}^n c_i$ durch die Implikationen $\neg y \rightarrow x$ und $\neg x \rightarrow y$, und bilden Sie daraus den gerichteten Graphen $G_\phi = (V, E)$ mit $V = \{x, \neg x, y, \neg y \mid x \vee y = c_i, i = 1, \dots, n\}$ und $E = \{(\neg y, x), (\neg x, y) \mid x \vee y = c_i, i = 1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann erfüllbar ist, wenn es in G_ϕ keinen gerichteten Kreis gibt, auf dem eine Variable x und ihre Negation $\neg x$ vorkommen.

4. **Aufgabe** (5 Punkte) Wir betrachten folgende Probleme:

FÄRBBARKEIT

Eingabe : Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Frage : Gibt es eine k -Knotenfärbung des Graphen G ?

NICHT-PRIMZAHL

Eingabe : Natürliche Zahl p .

Frage : Ist p keine Primzahl?

- (a) Zeigen sie, dass diese Sprachen in ver-P liegen.
- (b) Geben Sie für FÄRBBARKEIT und NICHT-PRIMZAHL je einen Algorithmus an, der diese Entscheidungsprobleme löst. Geben Sie an, wie schnell ihre Algorithmen arbeiten.