

Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmila Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

11. Januar 2008
Abgabe: 21. Januar 2008
vor der Vorlesung

11. Übung zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Aufgabe: Cliques (6 Punkte).

- (a) Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem für ungerichtete Graphen:

$$MAX-CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid \text{die größte Clique im Graph } G \text{ hat genau } k \text{ Knoten}\}$$

Es ist unbekannt, ob $MAX-CLIQUE$ in NP liegt. Zeigen Sie, dass unter der Hypothese $P = NP$ das Problem $MAX-CLIQUE$ in P liegt und sogar ein Algorithmus existiert, der eine Clique maximaler Größe in polynomieller Zeit findet und ihre Knoten ausgibt.

- (b) Ein Graph G liegt in $HALF-CLIQUE$, wenn er eine Clique enthält, deren Knotenanzahl mindestens halb so groß ist wie die Knotenanzahl von G selbst. Zeigen Sie, dass das Problem, ob ein Graph zu $HALF-CLIQUE$ gehört oder nicht, NP -vollständig ist.

2. Aufgabe: Längste und kürzeste Wege (4 Punkte).

Seien G ein ungerichteter Graph, s und t Knoten in G und l eine natürliche Zahl. Das Kürzeste-Wege-Problem ist gegeben durch:

$$SPATH = \{\langle G, s, t, l \rangle \mid G \text{ enthält einen Weg von } s \text{ nach } t, \\ \text{dessen Länge höchstens } l \text{ beträgt}\}$$

Beweisen Sie, dass $SPATH$ in P liegt. Das Längste-Wege-Problem

$$LPATH = \{\langle G, s, t, l \rangle \mid G \text{ enthält einen Weg von } s \text{ nach } t, \\ \text{dessen Länge mindestens } l \text{ beträgt}\}$$

dagegen ist NP -vollständig. Weisen Sie dies nach, indem Sie das Hamilton-Pfad-Problem für ungerichtete Graphen auf $LPATH$ reduzieren. Die Eingabe für das Hamilton-Pfad-Problem ist ein ungerichteter Graph. Gefragt ist, ob in G ein Weg existiert, der alle Knoten besucht.

3. Aufgabe: Erfüllbarkeit (6 Punkte).

- (a) Sei *MULTIPLE-SAT* die Menge der Booleschen Formeln, die zwei oder mehr erfüllende Belegungen haben. Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem, ob eine Formel zu *MULTIPLE-SAT* gehört, *NP*-vollständig ist.
- (b) Eine *3-CNF*-Formel gehört zur Menge *NOT-ALL-EQUAL-3-SAT*, wenn es eine erfüllende Belegung gibt, die in jeder vorkommenden Klausel höchstens zwei Literale auf „wahr“ setzt. Sie können annehmen, dass auch die Booleschen Konstanten 1 und 0 für „wahr“ und „falsch“ in den Klauseln als Literale vorkommen dürfen. Beweisen Sie, dass *NOT-ALL-EQUAL-3-SAT* ein *NP*-vollständiges Problem ist.

Hinweis: Begründen Sie, warum die Negation einer erfüllenden Belegung, die höchstens zwei Literale pro Klausel erfüllt, wieder eine erfüllende Belegung mit dieser Eigenschaft ist. Reduzieren Sie *3-SAT* auf *NOT-ALL-EQUAL-3-SAT*, indem sie jede Klausel $c_i = y_1 \vee y_2 \vee y_3$ durch die zwei Klauseln $y_1 \vee y_2 \vee z_i$ und $\bar{z}_i \vee y_3 \vee 0$ ersetzen.

4. Aufgabe: QSAT (4 Punkte).

Sei ϕ eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, bei der alle Literale nicht negierte Variablen sind. Eine solche Formel heißt monoton. *Monotone QSAT* ist das Entscheidungsproblem, ob für eine monotone Formel ϕ in den Variablen x_1, \dots, x_n die Aussage $\exists x_1 \forall x_2 \dots \exists x_{n-1} \forall x_n \phi(x_1, \dots, x_n)$ wahr ist. Beweisen Sie eine der folgenden Aussagen:

- (a) *Monotone QSAT* ist *PSPACE*-vollständig.
- (b) *Monotone QSAT* liegt in *P*.