Frank Hoffmann
Klaus Kriegel
Romain Grunert
Ludmilla Scharf
André Schulz

Ws 2007/08

1. Februar 2008
Abgabe: 11. Februar 2008
vor der Vorlesung

Bonuszettel zur Vorlesung Höhere Algorithmik

1. Optimales Alignment (5 Punkte).
Gegeben sind zwei Strings x, y über dem Alphabet Σ. Aus der Vorlesung ist bekannt, wie man ein optimales Alignment mit dynamischer Programmierung bestimmen kann. Modifizieren Sie diesen Algorithmus der Art, dass neben dem optimalen Alignment auch die Anzahl der optimalen Alignments bestimmt wird.

2. NP-Vollständigkeit (5 Punkte).

Hitting Set
Eingabe: Menge C von Teilmengen einer Menge S und eine ganze positive Zahl k.
Frage : Gibt es einen Auswahl $S' \subseteq S$ mit $|S'| \leq k$, so dass S' mindestens ein Element aus jeder Teilmenge von C enthält?

Zeigen Sie, dass Hitting Set NP-vollständig ist.

3. Maximum (5 Punkte)
Gegeben sind n unsortierte positive Zahlen $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

(a) Wir wollen das Maximum von S bestimmen. Dazu benutzen wir folgenden Algorithmus:

```
(0) max = 0
(1) FOR i = 1 to n
(2)   IF (s_i > max) THEN max = s_i
(3)   ENDFOR
```

Bestimmen Sie, wie oft der Wert von max in der Zeile (3) im Erwartungswert neu gesetzt wird.

(b) Wir bekommen die Elemente von S sequentiell in der Reihenfolge $s_1, s_2, \ldots, s_n$ zur Verarbeitung. Ziel ist es mit hoher Wahrscheinlichkeit das Maximum von S auszuwählen. Es ist allerdings nur erlaubt, sich für das aktuelle Element s_k zu entscheiden. Wenn man sich gegen s_k entscheidet, ist dieses Element nicht mehr als Maximum auswählbar.

Bestimmen Sie eine Strategie, wie man mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit unter diesen Voraussetzungen das Maximum auswählen kann. (Ziel sollte es sein, 1/4 als Wahrscheinlichkeit zu erhalten.)

4. Würfelgraph (5 Punkte).

Wir bezeichnen mit Q_n den *n-Würfelgraph*, dabei ist $Q_n = (V_n, E_n)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} V_n &:= \{0,1\}^n \\ E_n &:= \{(u,v) \mid u = (a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n), v = (a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, a_{k+1}, \ldots, a_n)\} \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir folgende Gewichtsfunktion w auf den Kanten

$$w((u,v)) := k, \text{ gdw. } u \text{ und } v \text{ unterscheiden sich an der Stelle } k.$$

(a) Berechnen Sie den MST von Q_3.

(b) Zeigen Sie, dass das Gewicht des MST von Q_n asymptotisch durch $\Theta(2^n)$ beschränkt ist.

Anmerkung:

Wählen Sie die beiden Aufgaben aus, die Sie korrigiert haben möchten! Der Bonuszettel dient als Test für die Klausur. Für die Bearbeitung der Aufgaben sollten Sie ca. 90 Minuten benötigen.